

УДК 518.517.948

МАТЕМАТИКА

Академик АН АзербССР А. И. ГУСЕЙНОВ, Г. М. ГАСАНОВ

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Исследование сходимости метода коллокации для интегральных уравнений проводилось в основном в равномерной и среднеквадратической метриках при соответствующих предположениях относительно ядра и свободного члена данного уравнения (см., например, (1-4)). В настоящей заметке методом коллокации, основанным на интерполяционном процессе, строятся приближенные решения линейного интегрального уравнения; используя некоторые свойства хаусдорфовой метрики и приближения функций относительно этой метрики (5, 6), мы устанавливаем оценки погрешности приближенных решений в метрике пространства суммируемых функций, причем полученные оценки выражаются через модули немопотности (5) ядра и свободного члена уравнения.

1. Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy + f(x), \quad (1)$$

где $K(x, y)$, $f(x)$ — заданные суммируемые функции в областях $a \leq x, y \leq b$, $a \leq x \leq b$ соответственно.

Приближенные решения ищем в виде

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_{in}, \quad (2)$$

где $\psi_{in}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, — неотрицательные непрерывные функции, заданные на $[a, b]$ и удовлетворяющие условиям

$$\psi_{in}(x_{jn}) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^n \psi_{in}(x) \equiv 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

x_{in} , $i = 1, 2, \dots, n$, — узлы коллокации, $a \leq x_{1n} < x_{2n} < \dots < x_{nn} \leq b$.

Согласно методу коллокации, коэффициенты c_i , $i = 1, 2, \dots, n$, из (2) находим таким образом, чтобы выражение (2) удовлетворяло уравнению (1) в точках x_{in} , $i = 1, 2, \dots, n$. Для определения c_i получим систему линейных алгебраических уравнений

$$c_j = \lambda \int_a^b K(x_j, y) \left[\sum_{i=1}^n c_i \psi_{in}(y) \right] dy + f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

2. Обозначим через $B_n[a, b]$ класс функций $f(x)$, заданных на $[a, b]$, для которых $\sup_x |f(x)| \leq B = \text{const}$ и

$$\max \{ \omega_f(\delta), \sup_{0 < t \leq \delta} |f(a) - f(a+t)|, \sup_{0 < t \leq \delta} |f(b) - f(b-t)| \} \leq \mu(\delta),$$

где

$$\mu_f(\delta) = \frac{1}{2} \sup_{|x_1 - x_2| \leq \delta} \{ \sup_{x_1 \leq x \leq x_2} |f(x_1) - f(x)| + |f(x_2) - f(x)| - |f(x_1) - f(x_2)| \}$$

есть модуль немонотонности функции $f(x)$, а $\mu(\delta)$ — заданная монотонно неубывающая функция, для которой $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(\delta) = \mu(0) = 0$.

Через $B_{\mu}[a, b]$ обозначим класс функций $F(x, y)$, заданных на $a \leq x, y \leq b$ и непрерывных относительно переменной y , для которых $\sup_{x, y} |F(x, y)| \leq B = \text{const}$ и

$$\max \{ \mu_F(\delta)_x, \sup_{\substack{0 < t \leq \delta \\ a \leq y \leq b}} |F(a, y) - F(a+t, y)|, \sup_{\substack{0 < t \leq \delta \\ a \leq y \leq b}} |F(b, y) - F(b-t, y)| \} \leq \bar{\mu}(\delta),$$

где $\mu_F(\delta)_x$ — модуль немонотонности функции $F(x, y)$ относительно переменной x , а $\mu(\delta)$ — заданная монотонно неубывающая функция, для которой $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(\delta) = \mu(0) = 0$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \psi_n(f, x) &= \sum_{i=1}^n f(x_{in}) \psi_{in}(x), \\ \bar{\psi}_n(K, x) &= \sum_{i=1}^n K(x_{in}, y) \psi_{in}(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= (b-a) \left\{ \inf_{0 < \delta \leq b-a} \left[4B \frac{\delta+1}{\delta} r(f, \psi_n) + \mu(\delta) \right] + r(f, \psi_n) \right\}, \\ \varepsilon_n &= (b-a) \sup_{a \leq y \leq b} \left\{ \inf_{0 < \delta \leq b-a} \left[4\bar{B} \frac{\delta+1}{\delta} r(K, \bar{\psi}_n)_x + \bar{\mu}(\delta) \right] + r(K, \bar{\psi}_n)_x \right\} \end{aligned}$$

где $r(f, \psi_n)$ — хаусдорфово расстояние между функциями $f(x)$ и $\psi_n(f, x)$, а $r(K, \bar{\psi}_n)$ — хаусдорфово расстояние между $K(x, y)$ и $\bar{\psi}_n(K, x)$ относительно переменной x .

В работе ⁽⁵⁾ (см. также ⁽⁷⁾) установлены оценки скорости сходимости выражения $r(f, \psi_n)$ в зависимости от функции $\mu(\delta)$.

В дальнейшем будем предполагать, что узлы x_{in} и функции $\psi_{in}(x)$ таковы, что для любой функции $f(x) \in B_{\mu}[a, b]$ и $K(x, y) \in B_{\bar{\mu}}[a, b]$ выполняются соответственно соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

3. Теорема. Пусть уравнение (1) имеет единственное решение $\varphi(x)$ в $L_{[a, b]}$, и пусть неотрицательные функции $f(x)$ и $K(x, y)$ измеримы на $a \leq x \leq b, a \leq x, y \leq b$ соответственно и $f(x) \in B_{\mu}[a, b], K(x, y) \in B_{\bar{\mu}}[a, b]$.

Тогда при всех достаточно больших n приближенные решения $\varphi_n(x)$, получаемые алгоритмом (2) и (3), существуют и имеет место соотношение

$$\|\varphi - \varphi_n\|_L \leq (1 + R_{\lambda}) \left[\beta_n + \frac{(b-a)B|\lambda|(1 + R_{\lambda})\varepsilon_n}{1 - |\lambda|(1 + R_{\lambda})\varepsilon_n} \right], \quad (4)$$

где

$$\|g\|_L = \int_a^b |g(x)| dx, \quad R_{\lambda} = |\lambda| \sup_y \int_a^b |R(x, y, \lambda)| dx,$$

$R(x, y, \lambda)$ — резольвента ядра $K(x, y)$.

Следствие 1. Пусть выполняются условия теоремы и пусть

$$\mu(\delta) = O(\delta^{\alpha}), \quad \bar{\mu}(\delta) = O(\delta^{\beta}), \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1.$$

Тогда

$$\|\varphi - \varphi_n\|_L = O\{[r(f, \psi_n)]^{\alpha/(\alpha+1)} + \sup_y [r(K, \bar{\psi}_n)]^{\beta/(\beta+1)}\}.$$

Как следствие из теоремы можно получить оценки погрешности приближенного решения при различном выборе функции $\psi_{in}(x)$ и узлов x_{in} .

Следствие 2. Пусть $a = -1, b = 1$,

$$\psi_{in}(x) = \left[\frac{T_n(x)}{n(x-x_{in})} \right]^2 (1 - xx_{in}),$$

где узлы x_{in} являются корнями полиномов Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$; $x_{in} = \cos \frac{2i-1}{2n} \pi$, и пусть выполняются условия теоремы.

Тогда справедливо неравенство (4); при этом

$$r(f, \psi_n) \leq \mu(n^{-1/2}) + O(n^{-1/2}),$$

$$r(K, \bar{\psi}_n)_x \leq \bar{\mu}(n^{-1/2}) + O(n^{-1/2}).$$

Следствие 3. Пусть $a = 0, b = 2\pi$,

$$\psi_{in}(x) = \frac{1}{n^2} \left[\frac{\sin \frac{x-x_{in}}{2} n}{\sin \frac{x-x_{in}}{2}} \right], \quad x_{in} = \frac{2\pi i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и пусть выполняются условия теоремы, причем функции $f(x)$ и $K(x, y)$ 2π -периодические.

Тогда справедливо неравенство (4), где

$$r(f, \psi_n) \leq \mu(n^{-1/2}) + O(n^{-1/2}),$$

$$r(K, \bar{\psi}_n)_x \leq \bar{\mu}(n^{-1/2}) + O(n^{-1/2}).$$

Следствие 4. Если выполняются условия следствия 2 или 3 и если

$$\mu(\delta) = O(\delta^\alpha), \quad \bar{\mu}(\delta) = O(\delta^\beta), \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1,$$

то

$$\|\varphi - \varphi_n\|_L = O(n^{-s^2}),$$

где

$$s = \min \left\{ \frac{\alpha}{\alpha+1}, \frac{\beta}{\beta+1} \right\}.$$

Замечание. Порядок погрешности приближенных решений можно также характеризовать в зависимости от свойства функции $\varphi(x)$, а именно, если $\varphi(x) \in B_\mu[a, b]$, $\varphi(x) \geq 0$, то

$$\|\varphi - \varphi_n\|_L \leq \frac{(1 + R_\lambda) \eta_n}{1 - |\lambda| (1 + R_\lambda) \varepsilon_n},$$

где

$$\eta_n = (b - a) \left\{ \inf_{0 < \delta \leq b-a} \left[4B \frac{\delta+1}{\delta} r(\varphi, \psi_n(\varphi, x)) + \mu(\delta) \right] + r(\varphi, \psi_n(\varphi, x)) \right\}.$$

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
10 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. В. Канторович, УМН, 3, в. 6, 89 (1948). ² М. Ф. Каспицкая, Л. Ю. Лучка, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 8, № 5, 950 (1968). ³ Э. Б. Каприловская, ДАН, 151, № 4, 766 (1963). ⁴ Р. М. Алиев, Матер. республиканск. научн. конфер. по матем. и механике, посвященной XXIV съезду КПСС, Баку, 1971. ⁵ Бл. Сендов, УМН, 24, 5, 149, 141 (1969). ⁶ Bl. Sendov, V. Poroov, Mathematica, 8 (31), 1, 163 (1966). ⁷ Г. М. Гасанов, Изв. АН АзербССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, № 3, 3 (1970).