

УДК 518.731.343.1

МАТЕМАТИКА

Академик Н. Н. КРАСОВСКИЙ, В. Д. БАТУХТИН

О НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ СБЛИЖЕНИЯ — УКЛОНЕНИЯ

Рассматриваются позиционная дифференциальная игра сближения фазовой точки $x[t]$ с замкнутым множеством M не позже, чем к некоторому моменту ϑ^0 , и связанная с ней дифференциальная игра уклонения вплоть до этого момента ϑ^0 ⁽¹⁾. Устанавливаются достаточные условия успешного завершения этих игр. В статье используются понятия и обозначения из работ ⁽²⁻⁴⁾.

Пусть движение управляемой системы описывается уравнением

$$dx/dt = f(t, x, u, v), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где x — n -мерный фазовый вектор, u и v — векторные управления игроков, стесненные ограничениями $u \in P$, $v \in Q$, P и Q — компакты, непрерывная функция $f(t, x, u, v)$ имеет непрерывные частные производные $\partial f_i(t, x, u, v) / \partial x_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, и удовлетворяет условиям равномерной продолжимости решений ⁽²⁾.

Рассмотрим проблему сближения с множеством M .

Задача о сближении. Построить стратегию ⁽²⁾ $U^*(t, x)$, которая гарантирует встречу точки $x[t]$ с множеством M из позиции $\{t_0, x_0\}$ к моменту ϑ^0 .

Следуя ⁽²⁾, будем рассматривать программные управления — меры $\eta(dt, du, dv)$ и порождаемые ими программные движения $x(t) = x(t; t_*, x_*, \eta)$, $t_0 \leq t_* \leq t \leq \vartheta$. Элементарной программой $\{\eta, [t_*, \vartheta), x_*\}$ будем называть множество мер $\eta(dt, du, dv)$, конструируемое следующим образом. Выберем в пространстве всех регулярных борелевских мер $\mu(dt, du)$ — управлений первого игрока ⁽²⁾ — слабый счетный базис $\mu^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$. Для базиса $\mu^{(i)}$ построим матрицу $(\eta^{(i)})^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots$, согласованных с $\mu^{(i)}$ условиями ⁽²⁾, стр. 521; ⁽⁴⁾, стр. 990) мер $(\eta^{(i)})^{(j)}$ таких, что последовательности $(\eta^{(i)})^{(j)}$ будут слабо сходиться при $j \rightarrow \infty$ при каждом i . Возьмем слабое замыкание каждого из множеств $(\eta^{(i)})^{(j)}$, $i = 1, 2, \dots$, при фиксированном j . Выделим из последовательности полученных множеств $\{\eta\}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots$, всевозможные слабо сходящиеся подпоследовательности $\eta^{(k)} \in \{\eta\}^{(j)}$, $k = 1, 2, \dots$. Множество слабых пределов этих подпоследовательностей и составит элементарную программу.

Определим величину $\varepsilon_0(t_*, x_*; t^*)$, $t_0 \leq t_* \leq t^* \leq \vartheta$, равенством

$$\varepsilon_0(t_*, x_*; t^*) = \max_{\{\eta\}_{\Pi}} \min_{\eta \in \{\eta\}_{\Pi}, p} \rho(\alpha(t^*; t_*, x_*, \eta \in \{\eta\}_{\Pi} + p), 0), \quad (2)$$

величину $\varepsilon_0(t_*, x_*)$ ⁽¹⁾ на $[t_*, \vartheta]$ — равенством

$$\varepsilon_0(t_*, x_*) = \min_{t_* \leq t^* \leq \vartheta} \varepsilon_0(t_*, x_*; t^*); \quad (3)$$

здесь $\rho(x, 0)$ — евклидово расстояние от точки x до начала координат $x = 0$, вектор $p \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P} = -M$. Оптимальные $t^0 \in [t_*, \vartheta]$, $\{\eta, [t_*, t^*), x_*\}_{\Pi^0}$, $\{\eta, [t_*, t^0), x_*\}_{\Pi^0}$ и $\eta^0 \in \{\eta\}_{\Pi^0}$ из (2), (3) существуют и, вообще говоря, не единственны.

Обозначим символом $S(t, t_*, x(\cdot), \eta)$ фундаментальную матрицу решений для уравнения

$$\dot{x}(t) = \delta x(t_*) + \iint_{[t_*, \eta] P Q} \frac{\partial f(\tau, x(\tau), u, v)}{\partial x} \delta x(\tau) \eta(d\tau, du, dv),$$

вычисленную на движении $x(\tau) = x(\tau; t_*, x_*, \eta)$, $t_* \leq \tau \leq t$, где $\partial f / \partial x$ — матрица частных производных $\{\partial f_i / \partial x_j\}$. Символом $T^0(t_*, x_*)$ обозначим множество решений t^0 задачи (3) и символом $L^0(t, x; t^0)$, $t^0 \in T^0(t, x)$, — множество единичных векторов $l^0(t, x; t^0)$ внешних нормалей к сферам $\|x\| \leq \varepsilon_0(t, x; t^0)$ в точках $x^0(t^0) \in G_{\mathcal{P}}(t, x; t^0; \{\eta\}_{\Pi^0})$, ближайших к $x = 0$, причем $G_{\mathcal{P}}(t, x; t^0; \{\eta\}_{\Pi^0})$ — замкнутая $\mathcal{P}$ — окрестность области достижимости $G(t, x, t^0; \{\eta\}_{\Pi^0})$ ^(1, 2).

Будем предполагать, что для всякой позиции $\{t_*, x_*\}$, $t_0 \leq t_* \leq \vartheta$, где $0 < \varepsilon_0(t_*, x_*) < N$ ($N > 0$ — const), и всякой вектор-функции $v^*(u) \in Q$ найдется такой момент времени $t^0 \in T^0(t_*, x_*)$, для которого выполняются следующие два условия.

А. Каждая максимизирующая элементарная программа $\{\eta\}_{\Pi^0} = \{\eta, [t_*, t^0], x_*\}_{\Pi^0}$ содержит единственное решение η^0 задачи (3), и точка $x_M \in M$, ближайшая к соответствующей точке $x^0(t^0) = x(t^0; t_*, x_*, \eta^0)$, единственна.

При условии А на всяком оптимальном программном движении $x^0(t) = x(t; t_*, x_*, \eta^0)$ выполняется условие минимакса ⁽⁵⁾.

Б. Найдется вектор $f^* \in F(t_*, x_*; v^*(u))$ такой, что для каждого вектора $l^{0'}(t_*, x_*; t^0) S(t^0, t_*, x^0(\cdot), \eta^0)$, где $l^0(t_*, x_*; t^0) \in L^0(t_*, x_*; t^0)$, будет справедливо неравенство

$$l^{0'}(t_*, x_*; t^0) S(t^0, t_*, x^0(\cdot), \eta^0) f^* \leq \leq \min_{u \in P} \max_{v \in Q} (l^{0'}(t_*, x_*; t^0) S(t^0, t_*, x^0(\cdot), \eta^0) f(t_*, x_*, u, v)),$$

где $F(t, x; v(u)) = \text{co}^* \{f(t, x, u, v) : u \in P, v = v(u)\}$ — выпуклая замкнутая оболочка множества $\{f\}$ векторов f , штрих означает транспонирование.

Лемма 1. Пусть выполняются условия А, Б и выбраны некоторая позиция $\{t_*, x_*\}$, для которой $\varepsilon_0(t_*, x_*) \in (0, N)$, $t_* \neq t^0$, и произвольная вектор-функция $v^*(u) \in Q$.

Тогда для любого $\Delta > 0$ найдется $\gamma > 0$ такое, что можно указать измеримую вектор-функцию $f^*[t] \in F(t, x^*[t]; v^*(u))$, обеспечивающую оценку

$$\varepsilon_0(t_* + \Delta, x^*[t_* + \Delta]; t^0) - \varepsilon_0(t_*, x[t_*]; t^0) \leq \alpha \Delta,$$

как только $\Delta \leq \gamma$; здесь $x^*[t]$, $t_* \leq t \leq \vartheta$, есть решение уравнения в контигенциях ⁽⁶⁾

$$dx^*[t] / dt = f^*[t] \in F(t, x^*[t]; v^*(u)). \quad (4)$$

Пусть лемма неверна. Тогда найдется число $\alpha^* > 0$ такое, что для всякого движения $x^*[t]$, $t \geq t_*$, определяемого уравнением $\dot{x}^*[t] \in F(t, x^*[t]; v^*(u))$, $x^* = x^*[t_*]$, можно указать последовательность $t^{(k)} = (t_* + \Delta^{(k)}) \rightarrow t_*$ при $k \rightarrow \infty$ такую, что для $x^{*(k)} = x^*(t^{(k)})$ будет справедливо неравенство

$$\varepsilon_0(t^{(k)}, x^*[t^{(k)}]; t^0) - \varepsilon_0(t_*, x[t_*]; t^0) > \alpha^* \Delta^{(k)} \quad (5)$$

при любом k .

Возьмем то решение $x^*[t]$ уравнения (4), которое порождается вектор-функцией $f^*[t]$, удовлетворяющей при $t = t_*$ условию Б. Каждой позиции $\{t^{(k)}, x^{(k)}\}$ отвечает максимальная оптимизирующая программа $\{\eta\}_{\Pi, k}^{00}$ ⁽²⁾. Можно осуществить сужение программ $\{\eta\}_{\Pi, k}^{00}$ и проредить последовательность $\{t^{(k)}\}$ так, чтобы пределы всевозможных слабо сходящихся подпоследовательностей мер $\eta^{(k_r)}$, принадлежащих этим суженным программам $\{\eta\}_{\Pi, k_j}^{00}$, образовали оптимальную элементарную программу $\{\eta\}_{\Pi^0}$ для

позиции $\{t_*, x_*\}$. По условию А программа $\{\eta\}_{\Pi^0}$ содержит единственное оптимальное управление η^0 . Это управление η^0 порождает оптимальное для $\{t_*, x_*\}$ программное движение $x^0(t) = x(t; t_*, x_*, \eta^0)$, которое является пределом равномерно сходящейся на $[t^*, t^0]$, $t^* > t_* + \Delta^{(k_j)}$, последовательности движений $x(t, t^{(k_j)}, x^*[t^{(k_j)}], \eta^{0(k_j)})$ (⁴, ⁶), где $\eta^{0(k_j)}$ — оптимальное управление из $\{\eta\}_{\Pi, k_j}^{00}$. Зафиксируем это движение $x^0(t)$ и последовательность $\{t^{(k_j)}, x^{(k_j)}\}$. Введем составные программы $\{\eta\}_{\Pi, k_j}^{(c)}$, состоящие на $\Delta^{(k_j)} = [t_*, t^{(k_j)}]$ из управлений $\eta^{(c)}$, удовлетворяющих условию максимума

$$\begin{aligned} & \iint_{\Delta^{(k_j)} PQ} \int l^{0'}[t_*] S(t^0, \tau, x^0(\tau), \eta^0) f(\tau, x^0(\tau), u, v) \eta^{(c)}(d\tau, du, dv) = \\ & = \int_{\Delta^{(k_j)}} \int_P \max_{v \in Q} (l^{0'}[t_*] S(t^0, \tau, x^0(\tau), \eta^0) f(\tau, x^0(\tau), u, v)) \mu(d\tau, du), \quad (6) \end{aligned}$$

а на $[t^{(k_j)}, t^0]$ совпадающие с программами $\{\eta\}_{\Pi, k_j}^{00} = \{\eta, [t^{(k_j)}, t^0], x^*[t^{(k_j)}]\}_{\Pi^0}$. Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \varepsilon_0(t^{(k_j)}, x^*[t^{(k_j)}]; t^0) - \varepsilon_0(t_*, x[t_*]; t^0) \leqslant \\ & \leqslant l_*^*[t^{(k_j)}] (x_{(k_j)}^{(c)}(t^0) - x_{(k_j)}^{(c^0)}(t^0)); \end{aligned} \quad (7)$$

здесь $x_{(k_j)}^{(c^0)}(t^0)$ — одна из ближайших к $x = 0$ точек области достижимости, порождаемой $\{\eta\}_{\Pi, k_j}^{(c)}$ (в эту точку приводит управление $\eta_{(k_j)}^{(c^0)}$, $x_{(k_j)}^{(c)}(t^0)$ — точка, в которую приводит то же управление $\eta_{(k_j)}^{(c^0)}$, но из позиции $\{t^{(k_j)}, x^*[t^{(k_j)}]\}$, $l_*^*[t^{(k_j)}]$ — единичный вектор внешней нормали к сфере $\|x\| \leqslant \rho(x_{(k_j)}^{(c)}(t^0), 0)$ в точке $x_{(k_j)}^{(c)}(t^0)$.

Далее показывается, что при условии Б неравенства (5) и (7) противоречивы. Это противоречие доказывает лемму.

Из леммы 1 с помощью рассуждений, подобных приведенным в (²), выводится следующая

Теорема 1. Пусть $\vartheta = \vartheta^0$ — момент программного поглощения для исходной позиции $\{t_0, x_0\}$, который определяется равенством $\varepsilon_0(t_0, x_0) = \min_{t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta} \varepsilon_0(t_0, x_0; t) = 0$. Пусть для $\vartheta = \vartheta^0$ выполняются условия А, Б.

Тогда экстремальная (², ³) к множеству $W = \{\{t, x\}: \varepsilon_0(t, x) = 0\}$ стратегия $U^*(t, x)$ обеспечивает сближение с множеством M не позже, чем к моменту ϑ^0 , каково бы ни было управление $v \in Q$, т. е. $U^*(t, x)$ обеспечивает равенство

$$\min_{t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta^0} (\max_{x[t]} [\rho(x[t], M)]) = 0.$$

Условия А, Б выполняются, в частности, в случае единственности для программы $\{\eta\}_{\Pi^0}$ (²) решения η^0 и точки $x_M \in M$, ближайшей к точке $x^0(t^0)$, хотя бы при одном $t^0 \in T^0(t^*, x_*)$.

В чисто линейном случае $\dot{x} = A(t)x + u - v$ критерий, подобный Б, рассматривался в (⁷), в собственно линейном случае $\dot{x} = A(t)x + f(t, u, v) - v$ [⁸].

Естественность условий теоремы 1 выясняется с помощью следующего контрпримера В, заменяющего условие Б:

В. Для любого вектора u_* найдется вектор $f_* \in F(t_*, x_*; u_*)$ такой, что для каждого $t^0 \in T^0(t_*, x_*)$ и $l^{0'}(t_*, x_*; t^0) S(t^0, t_*, x^0(\cdot), \eta^0)$, где $l^0(t_*, x_*; t^0) \in L^0(t_*, x_*; t^0)$, будет справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & l^{0'}(t_*, x_*; t^0) S(t^0, t_*, x^0(\cdot), \eta^0) f_* \geqslant \\ & \geqslant \min_{u \in P} \max_{v \in Q} (l^{0'}(t_*, x_*; t^0) S(t^0, t_*, x^0(\cdot), \eta^0) f(t_*, x_*, u, v)). \end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть выполняется условие В и выбрана некоторая позиция $\{t_*, x_*\}$ $\varepsilon_0(t_*, x_*) \in (0, N)$, $t_* \neq t^0$.

Тогда для любого $\alpha > 0$ найдется $\gamma > 0$ такое, что для любого вектора $u_* \in P$ можно указать вектор-функцию $f_*[t] \in F(t, x_*[t]; u_*[t])$, обеспечивающую на движении $\dot{x}[t] = f_*[t]$ оценку

$$\varepsilon_0(t_* + \Delta, x_*[t_* + \Delta]; t^0) - \varepsilon_0(t_*, x[t_*]; t^0) \geq \alpha \Delta,$$

как только $\Delta \leq \gamma$.

Теорема 2. Пусть выполняется условие В. Тогда при $\varepsilon_0(t_0, x_0) \in (0, N)$ контрстратегия $V(t, x, u)$ ⁽³⁾, экстремальная к множеству $W = \{\{t, x\}: \varepsilon(t, x) \geq \varepsilon_0(t_0, x_0)\}$, обеспечивает уклонение от множества M в течение времени $[t_0, \vartheta^*]$, $\vartheta^* \leq \vartheta$, каким бы ни было управление $u \in P$, т. е. обеспечивает выполнение неравенства

$$\min_{t_0 \leq t \leq \vartheta^*} (\min_{x[t]} [\rho(x[t], M)]) \geq \varepsilon = \varepsilon_0(t_0, x_0).$$

Если $\min_{u \in P} \max_{v \in Q} s' \cdot f(t, x, u, v) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} s' \cdot f(t, x, u, v)$ при всех s, x и t , то в теореме 2 $V(t, x, u) = V(t, x)$.

Институт математики и механики
Уральского научного центра Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
28 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Н. Красовский, Игровые задачи о встрече движений, «Наука», 1970.
- ² Н. Н. Красовский, ПММ, 36, в. 6 (1972). ³ Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, В. Н. Ушаков, ДАН, 206, № 2 (1972). ⁴ Н. Н. Красовский, ДАН, 203, № 3 (1972). ⁵ А. Ф. Филиппов, Матем. сборн., 51 (93), № 1 (1960).
- ⁶ В. Д. Батухтин, Н. Н. Красовский, Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, № 6 (1972). ⁷ W. Borgest, P. Varaiya, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-16, № 5 (1971). ⁸ С. И. Тарлинский, ПММ, 37, в. 1 (1973).