

УДК 518.9

МАТЕМАТИКА

Т. Н. ДАНИЛЬЧЕНКО, К. К. МОСЕВИЧ

МНОГОШАГОВЫЕ ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С НЕПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ ИНТЕРЕСАМИ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 22 XII 1972)

Рассматривается игра двух лиц, где векторы $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ и $y = (y_1, \dots, y_n) \in Y$ — выбор игроков. Каждый из игроков стремится к увеличению своей функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, где f_i , $i = 1, 2$, непрерывны на компакте $X \times Y$. Пусть первый игрок, рассчитывая на информацию об y , первым выбирает стратегию — произвольную функцию $x(y)$ при условии $x \in X$ и сообщает ее второму игроку. В этих условиях задача определения наибольшего гарантированного результата и оптимальной стратегии первого игрока впервые сформулирована и решена в ⁽¹⁾.

Процедура принятия решений сторонами в ⁽¹⁾ существенно одношаговая, при этом

$$x_j = x_j(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1)$$

Стратегии вида (1) встречаются в постановке задач теории иерархических систем управления ⁽²⁾, а также в работе ⁽³⁾.

Введем $x_j = (x_1, x_2, \dots, x_j)$ и $y_j = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Пусть $x_j \in X_j$, $y_j \in Y_j$ и f_i , $i = 1, 2$, непрерывны на

$$X = \prod_{j=1}^n X_j, \quad Y = \prod_{j=1}^n Y_j.$$

Рассмотрим ситуацию, в которой выбор стратегии x_j на j -м ходу первым игроком производится на основе информации, сложившейся к j -му ходу, и поведения второго игрока на j -м ходу. В этом случае стратегией поведения первого игрока на j -м ходу является функция

$$x_j = x_j(x_{j-1}, y_j).$$

Стратегией поведения первого игрока на всех n шагах является набор функций

$$\{x_1(y_1); \quad x_j(x_{j-1}, y_j); \quad 2 \leq j \leq n\},$$

который можно представить в виде

$$\{x_j(y_j); \quad 1 \leq j \leq n\}. \quad (2)$$

Второй игрок на j -м ходу выбирает y_j . Возможны несколько вариантов сообщения первым игроком своих стратегий из (2) второму игроку, из которых отметим два:

1) Первый игрок сразу на все n ходов сообщает свои стратегии $\{x_j(y_j); \quad 1 \leq j \leq n\}$. Сразу же заметим, что множество стратегий первого игрока в этом случае является лишь частью аналогичного множества в ⁽¹⁾ в силу того, что $x_j = x_j(y_j)$, но не $x_j = x_j(y)$. Последнее обстоятельство является отражением существенной многошаговости процесса принятия решений первым игроком.

2) Первый игрок сообщает второму свои стратегии — функции $x_j(y_j)$, $1 \leq j \leq n$, последовательно, т. е. только на очередной, j -й ход. В этом варианте процедура принятия решений сторонами существенно многошаго-

вая для каждой из них. В частности, второй игрок, выбирая на j -м ходу стратегию y_j , знает сложившуюся предысторию x_{j-1} , y_{j-1} и функцию $x_j(y_j)$

В настоящей работе ограничимся нахождением оптимального гарантирования результата и оптимальной стратегии первого игрока в задаче 1

Введем следующие величины и обозначения:

$$L_j(x_j, y_j) = \max_{y_{j+1} \in Y_{j+1}} \min_{x_{j+1} \in X_{j+1}} L_{j+1}(x_{j+1}, y_{j+1}), \quad 0 \leq j \leq n-1; \quad (3)$$

$$x_j^*(x_{j-1}, y_j) = \{x_j^* \mid \min_{x_j \in X_j} L_j(x_j, y_j) = L_j(x_{j-1}, x_j^*, y_j)\}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (4)$$

$$E_j(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{y}_{j-1}) = \{\tilde{y}_j | L_j(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{y}_{j-1}, \mathbf{x}_j^*, \tilde{y}_j) = L_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{y}_{j-1})\}, \quad 1 \leq j \leq n; \quad (5)$$

$$M_j(x_j, y_j) = \inf_{y_{j+1} \in E_{j+1}(x_j, y_j)} \sup_{x_{j+1} \in X_{j+1}} M_{j+1}(x_{j+1}, y_{j+1}), \quad 0 \leq j \leq n-1. \quad (6)$$

Сделаем предположение о существовании $x_j^a(x_{j-1}, y_j)$, реализующей

$$\max_{x_j \in X_j} M_j(x_j, y_j) = M_j(x_{j-1}, x_j^a, y_j), \quad 1 \leq j \leq n; \quad (7)$$

[illegible]

Для простоты дальнейшего изложения будем предполагать, что в области D_j из (8) существует точка $(x_{ij}^0, y_{ij}^0, \dots, x_{jj}^0, y_{jj}^0)$, реализующая

$$K_j = \begin{cases} \sup_{(x_j, y_j) \in D_j} M_j(x_j, y_j) = M_j(x_{1j}^0, y_{1j}^0, \dots, x_{jj}^0, y_{jj}^0), & \text{если } D_j \neq \emptyset, \\ -\infty, & \text{если } D_j = \emptyset, \end{cases} \quad (9)$$

Оговоренное ранее стремление каждого из игроков к увеличению своего платежа при сформулированном виде стратегий сторон и той информации, на основе которой производится выбор стратегий, в настоящей работе реализуется следующим образом:

1. При заданной первой игроком стратегии $\{x_j(y_j); 1 \leq j \leq n\}$ второй игрок выбирает стратегию y из условия реализации

$$\max_{\mathbf{y}} f_2 [x_1(y_1), y_1, x_2(y_2), y_2, \dots, x_n(y_n), y_n],$$

откуда следует, что участие второго игрока в процедуре взаимодействия (в игре) сводится к решению задачи оптимизации.

2. Первый игрок выбором $\{x_j(y_j); 1 \leq j \leq n\}$ стремится к реализации наибольшего гарантированного результата, который обозначим γ . Определим следующие стратегии:

$$x^* = \begin{cases} x_j = x_j^a, & \text{если } y_j \in E_j, \quad 1 \leq j \leq n; \\ x_j = x_j^*, \quad 1 \leq j \leq n, & \text{если } y_1 \notin E_1; \\ x_j = x_j^a, \quad 1 \leq j \leq p, & \text{если } y_j \in E_j, \quad 1 \leq j \leq p; \\ x_j = x_j^*, \quad p+1 \leq j \leq n, & \text{если } y_{p+1} \in E_{p+1}; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
x^{(j)} = & \left\{ \begin{array}{ll} \begin{cases} x_a = x_{aj}^0, & 1 \leq a \leq j, \\ x_a = x_a^a, & j+1 \leq a \leq n, \\ x_a = x_a^*, & 1 \leq a \leq n, \end{cases} & \begin{array}{l} \text{если } y_a = y_{aj}^0, \quad 1 \leq a \leq j; \\ \text{если } y_a \in E_a, \quad j+1 \leq a \leq n; \\ \text{если } y_1 \neq y_1^0; \end{array} \\ \begin{cases} x_a = x_{aj}^0, & 1 \leq a \leq m < j, \\ x_a = x_a^*, & m+1 \leq a \leq n, \end{cases} & \begin{array}{l} \text{если } y_a = y_{aj}^0, \quad 1 \leq a \leq m < j; \\ \text{если } y_{m+1} \neq y_{m+1}^0; \end{array} \end{array} \quad (11) \\
& \left\{ \begin{array}{ll} \begin{cases} x_a = x_{aj}^0, & 1 \leq a \leq j, \\ x_a = x_a^*, & j+1 \leq a \leq n, \end{cases} & \begin{array}{l} \text{если } y_a = y_{aj}^0, \quad 1 \leq a \leq j; \\ \text{если } y_{j+1} \in E_{j+1}; \end{array} \\ \begin{cases} x_a = x_{aj}^0, & 1 \leq a \leq j, \\ x_a = x_a^a, & j+1 \leq a \leq m < n, \\ x_a = x_a^*, & m+1 \leq a \leq n, \end{cases} & \begin{array}{l} \text{если } y_a = y_{aj}^0, \quad 1 \leq a \leq j; \\ \text{если } y_a \in E_a, \quad j+1 \leq a \leq m < n; \\ \text{если } y_{m+1} \notin E_{m+1}; \end{array} \end{array} \\
& \quad j = 1, 2, \dots, (n-1); \\
x^{(n)} = & \left\{ \begin{array}{ll} \begin{cases} x_a = x_{an}^0, & 1 \leq a \leq n, \\ x_a = x_a^*, & 1 \leq a \leq n, \end{cases} & \begin{array}{l} \text{если } y_a = y_{an}^0, \quad 1 \leq a \leq n; \\ \text{если } y_1 \neq y_1^0; \end{array} \\ \begin{cases} x_a = x_{ah}^0, & 1 \leq a \leq p < n, \\ x_a = x_a^*, & p+1 \leq a \leq n, \end{cases} & \begin{array}{l} \text{если } y_a = y_{an}^0, \quad 1 \leq a \leq p < n; \\ \text{если } y_{p+1} \neq y_{p+1}^0. \end{array} \end{array}
\end{aligned}$$

В сформулированных условиях верна следующая

Теорема. 1) *Применение стратегий (10), (11) гарантирует первому игроку результаты M_0 и K_j соответственно, $1 \leq j \leq n$;*

$$2) \quad \gamma = \max \left\{ \max_{1 \leq j \leq n} K_j; M_0 \right\}. \quad (12)$$

Стратегия из (10), (11), гарантирующая получение реализации $\max$ в (12), оптимальна для первого игрока.

З а м е ч а н и я. 1 В работе сделаны предположения о непустоте множеств (5); существовании x_j^a , $1 \leq j \leq n$, из (7) и точки реализации K_j в (9). Эти предположения заведомо выполнены, если на j -м ходу число альтернатив при выборе x_j и y_j конечно. 2) В случае бесконечного множества альтернатив при выборе x_j , y_j отказ от предположений, сделанных в работе, по-видимому, возможен введением ε -оптимальных стратегий и множеств аналогично работе (1).

Авторы благодарят проф. Ю. Б. Гермейера за постановку задачи, ценные замечания и постоянное внимание к работе.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
1 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ю. Б. Гермейер, ДАН, 198, № 5 (1971). ² Ю. Б. Гермейер, Н. Н. Моисеев, О некоторых задачах теории иерархических систем управления. Проблемы прикладной математики и механики. Сборн. статей, «Наука», 1971. ³ В. А. Горелик, Сборн. Исследование операций, в. 4, 1971.