

С. А. ЛОМОВ

ФОРМАЛИЗМ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 27 XII 1972)

Классическая теория возмущений (^{1, 2, 3}) развита для случая, когда возмущения производятся в подчиненных членах оператора. Если же возмущаются главные члены оператора, то задача сильно усложняется, и хотя этой тематике посвящены очень большие исследования, аналога классического метода возмущений не было. Только после развития метода перехода в пространство большей размерности, который позволяет диагонализировать некоторый расширенный оператор по спектру невозмущенного оператора, намечились общие контуры неклассической теории возмущений, изложенной на примере обыкновенных линейных систем в (⁵). Формализм ее для обыкновенных уравнений излагался и ранее (см., например, (²⁻⁴)).

В настоящей статье будет изложен формализм неклассической теории возмущений для некоторых уравнений с частными производными и для нелинейных обыкновенных уравнений.

1. Изучим смешанную краевую задачу

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon \partial u / \partial t - Lu = h(x, t), \quad u|_\Gamma = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (1)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$ в произвольной области Ω с гладкой границей Γ ; здесь

$$L u \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a(x, t) u, \quad a_{ij} = a_{ji};$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \alpha = \text{const} > 0,$$

для любых вещественных ξ_i и $\forall t \in [0, T]$; $a(x, t) \geq 0$. Обозначим $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau)$ и $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Рассмотрим пучок операторов задачи (1):

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \psi|_\Sigma = 0. \quad (2)$$

Предположим для простоты, что спектр дискретный, невырожденный и удовлетворяет условию

$$\dots < \lambda_k(t) < \dots < \lambda_2(t) < \lambda_1(t) < 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (3)$$

и собственные функции $\psi_k(x, t)$ образуют полную систему в $L_2(\Omega)$ при фиксированном $t \in [0, T]$.

Мы предполагаем также, что данные задачи (a_{ij} , a , h , φ) обладают необходимой гладкостью в соответствующих пространствах.

С помощью спектра задачи (2) произведем расширение оператора L_ε и диагонализацию расширенного оператора (при $\varepsilon = 0$) следующим образом. Введем дополнительные независимые переменные по формуле

$$\tau_i = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_i(x) dx \equiv \varphi_i(t, \varepsilon) \quad (4)$$

и будем вместо искомого решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1) изучать «расширенную» функцию $\tilde{u}(x, t, \tau, \varepsilon)$, сужение которой

$$\tilde{u}|_{\tau=\varphi(t, \varepsilon)} = u(x, t, \varepsilon); \quad (5)$$

здесь $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots)$, $\varphi(t, \varepsilon) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots)$. Из соотношений (4), (5) мы получим, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} D_{\tau} \tilde{u}, \quad D_{\tau} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(t) \frac{\partial}{\partial \tau_i},$$

и для расширенной функции поставим следующую задачу:

$$\bar{L}_{\varepsilon} \tilde{u} \equiv \varepsilon \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + D_{\tau} \tilde{u} - L \tilde{u} = f(x, t), \quad (6)$$

$$\tilde{u}(x, 0, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad \tilde{u}|_{\Sigma} = 0 \quad \forall \tau. \quad (7)$$

Теперь, как и в классическом методе возмущений, определяем решение задачи (6), (7) в виде ряда

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, t, \tau). \quad (8)$$

Из задачи (6), (7) обычным способом получаем следующие задачи для определения коэффициентов ряда:

$$L_0 u_0 = D_{\tau} u_0 - L u_0 = f(x, t), \quad u_0(x, 0, 0) = \varphi(x), \quad u_0|_{\Sigma} = 0 \quad \forall \tau, \quad (9)$$

$$L_0 u_i = -\frac{\partial u_{i-1}}{\partial t}, \quad u_i(x, 0, 0) = 0, \quad u_i|_{\Sigma} = 0 \quad \forall \tau, \quad i = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Правую часть $f(x, t)$ разложим в ряд по собственным функциям задачи (2):

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \psi_k(x, t)$$

и решения задач (9) и (10) будем определять в некотором классе элементарных решений U , члены u которого представимы в виде следующих рядов: $u(x, t, \tau) = z(x, t) + v(x, t, \tau) + w(x, t, \tau)$,

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \psi_k(x, t), \quad v(x, t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) e^{\tau_k} \psi_k(x, t), \\ w &= \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t, \tau) \psi_k(x, t), \quad w_k(t, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} w_{ki}(t) e^{\tau_i}. \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим, что ядро оператора L_0 в классе функций U порождается множеством функций $\{e^{\tau_k} \psi_k(x, t)\}$.

Оператор L_0 на классе функций U является диагонализированным по собственным подпространствам оператора L . Так что класс функций U является инвариантным относительно оператора L_0 .

Для разрешимости задач (9) или (10) в классе U остаются справедливыми теоремы 1 и 2 работы (5) (сопряженный оператор строится относительно соответствующим образом выбранного скалярного произведения). Так что все задачи (9), (10) однозначно разрешимы в классе функций U и ряд (8) однозначно определен. Доказывается, что ряд (8) асимптотически сходится в пространствах Соболева (6).

2. Гиперболическая задача

$$\varepsilon \partial \eta / \partial t = Lu + f(x, t), \quad \eta(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad \eta|_{\Gamma} = 0, \quad (12)$$

$$\varepsilon \partial u / \partial t = \eta, \quad u(x, 0, \varepsilon) = \psi(x), \quad u|_{\Gamma} = 0$$

изучается аналогично тому, как была изучена параболическая. Поэтому мы остановимся только на тех моментах, которые несколько отличаются от предыдущего.

Составим пучок операторов задачи (12):

$$L\psi = \lambda^2\psi, \quad \psi|_z = 0. \quad (13)$$

Используя обозначения и предположения п. 1, спектр задачи (13) можно записать в виде $\pm i\sqrt{-\lambda_1(t)}, \pm i\sqrt{-\lambda_2(t)}, \dots$ и каждой паре $\pm i\sqrt{-\lambda_k(t)}$ отвечает собственная функция $\psi_k(x, t)$. Обозначим $\sqrt{-\lambda_k(t)} = \omega_k(t)$, дополнительные переменные введем по формулам:

$$\tau_k = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \omega_k(\tau) d\tau \equiv \varphi_k(t, \varepsilon).$$

Введем еще обозначение $(\eta, u) = y$ и снова вместо искомого решения $y(x, t, \varepsilon)$ будем изучать $\tilde{y}(x, t, \tau, \varepsilon)$, причем, как и ранее,

$$\tilde{y}(x, t, \tau, \varepsilon)|_{\tau=\varphi(t, \varepsilon)} \equiv y(x, t, \varepsilon).$$

Для определения функции $\tilde{y}$ получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial \tilde{\eta} / \partial t + D_\tau \tilde{\eta} - L \tilde{u} &= f(x, t), \quad \tilde{\eta}(x, 0, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad \tilde{\eta}|_z = 0 \quad \forall \tau, \\ \varepsilon \partial \tilde{u} / \partial t + D_\tau \tilde{u} - \tilde{\eta} &= 0 \quad \tilde{u}(x, 0, 0, \varepsilon) = \psi(x), \quad \tilde{u}|_z = 0 \quad \forall \tau, \end{aligned} \quad (14)$$

$$D_\tau z \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(t) \frac{\partial z}{\partial \tau_k}.$$

Пусть

$$\tilde{y} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i(x, t, \tau). \quad (15)$$

Для определения коэффициентов ряда получим следующие задачи:

$$D_\tau \eta_0 - L u_0 = f(x, t), \quad \eta_0(x, 0, 0) = \varphi(x), \quad \eta_0|_z = 0 \quad \forall \tau, \quad (16)$$

$$D_\tau u_0 - \eta_0 = 0, \quad u_0(x, 0, 0) = \psi(x), \quad u_0|_z = 0 \quad \forall \tau;$$

$$\begin{aligned} D_\tau \eta_i - L u_i &= -\partial \eta_{i-1} / \partial t, \quad \eta_i(x, 0, 0) = 0, \quad \eta_i|_z = 0 \quad \forall \tau, \quad (17) \\ D_\tau u_i - \eta_i &= -\partial u_{i-1} / \partial t, \quad u_i(x, 0, 0) = 0, \quad u_i|_z = 0 \quad \forall \tau, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Класс элементарных решений Y будет следующим. Любой элемент $y \in Y$ будет представлять сумму трех слагаемых:

$$y = z(x, t) + v(x, t, \tau) + w(x, t, \tau),$$

где

$$v(x, t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t, \tau_k) \psi_k(x, t), \quad w(x, t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k(t, \tau_k) \psi_k(x, t),$$

$$b_k(t, \tau_k) = c_k(t) \sin \tau_k + v_k(t) \cos \tau_k, \quad \bar{b}_k(t, \tau_k) = \sum_{i=1 \atop (i \neq k)}^{\infty} b_i(t, \tau_i) \psi'_{ki}(t).$$

Для задач (16) и (17) остаются справедливыми заключительные утверждения предыдущей задачи.

Замечание. При дополнительных ограничениях на данные задач ряды (8) и (15) сходятся в метрике пространства $L_2(\Omega)$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$ при фиксированном τ .

3. В нелинейном случае метод применяется аналогичным образом (см., например, (4)). Мы для простоты рассмотрим задачу Коши в скалярном случае:

$$\varepsilon y' = F(y, x), \quad y(0, \varepsilon) = y^2 \quad (18)$$

Пусть предельное уравнение $F(\omega, x) = 0$ имеет изолированный на отрезке $[0, a]$ корень $w = w(x)$ к $\partial F(\omega, x) / \partial y < 0 \quad \forall x \in [0, a]$. Введем дополнительное независимое переменное

$$t = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \lambda(\omega(\tau), \tau), \quad d\tau \equiv \varphi(x, \varepsilon), \quad \lambda(\omega, x) = \frac{\partial F(\omega, x)}{\partial y},$$

и будем изучать функцию $\tilde{y}(x, t, \varepsilon)$ такую, что

$$\tilde{y}(x, t, \varepsilon) |_{t=\varphi(x, \varepsilon)} = y(x, \varepsilon).$$

Тогда для определения функции $\tilde{y}$ мы получаем задачу:

$$\varepsilon \partial \tilde{y} / \partial x - \lambda(\omega, x) \partial \tilde{y} / \partial t - F(\tilde{y}, x) = 0, \quad \tilde{y}(0, 0, \varepsilon) = y^0. \quad (19)$$

Находим функцию $\tilde{y}$ в виде ряда: $\tilde{y} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i(x, t)$. Подставив этот ряд в задачу (19), мы для определения коэффициентов ряда получаем задачи:

$$\lambda(w, x) \partial y_0 / \partial t - F(y_0, x) = 0, \quad y_0(0, 0) = y^0, \quad (20)$$

$$\lambda(w, x) \partial y_i / \partial t - \lambda(y_0, x) y_i = h_i(y_{i-1}, \dots, y_0, x), \quad y_i(0, 0) = 0. \quad (21)$$

Класс элементарных решений Z определяется следующим образом. Если начальное значение y^0 принадлежит области влияния асимптотически устойчивого корня $w = w(x)$ (см. (7)), то задача (20) имеет решения вида $y_0(x, t) = f_0(c_0(x)e^t, x)$, где функция $f(z, x)$ аналитична по первому аргументу. Любой элемент $z_i \in Z$ представим в виде $z_i = f_i(c_i(x)e^t, x)$. Асимптотическая сходимость ряда доказывается по норме пространства $C[0, a]$.

В заключение следует отметить, что внимание математиков к настоящей тематике было привлечено фундаментальными исследованиями А. Н. Тихонова (см., например, (7)). К разработке предлагаемого метода привело решение одной из задач, предложенной мне в 1958 г. М. И. Вишиком.

Московский энергетический
институт

Поступило
29 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, М., 1963. ² С. А. Ломов, ДАН, 177, № 6, 1273 (1967). ³ С. А. Ломов, Тр. V Междунаро. конф. по нелинейным колебаниям, 1, Киев, 1970. ⁴ С. А. Ломов, Тр. Москвск. энергетич. инст. (математика), в. 89, 3 (1971). ⁵ С. А. Ломов, Изв. АН СССР, сер. матем., 36, 635 (1972). ⁶ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, 1962. ⁷ А. Н. Тихонов, Матем. сборн., 31 (73), 575 (1952). ⁸ К. Фридрихс, Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве, М., 1969. ⁹ Т. Като, Теория возмущений линейных операторов, М., 1972.