

УДК 519.3

МАТЕМАТИКА

В. Н. МАЛОЗЕЛОВ, А. Б. ПЕВНЫЙ

АЛЬТЕРНАНСНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 I 1973)

1°. Пусть Q — некоторый компакт, содержащий не менее $n + 1$ точки, а R^n — n -мерное евклидово пространство. Рассматривается задача

$$\max_{t \in Q} |F(x, t)| \rightarrow \min_{x \in R^n} \quad (1)$$

где $F(x, t)$ — функция, непрерывная вместе с $\partial F(x, t)/\partial x$ на $R^n \times Q$. Введем обозначение

$$\varphi(x) = \max_{t \in Q} |F(x, t)|.$$

и предположим, что $\inf_{x \in R^n} \varphi(x) > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $a \in R^n$ — решение задачи (1) и система функций

$$\frac{\partial F(a, t)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F(a, t)}{\partial x_n} \quad (2)$$

является чебышевской на Q .

Тогда на Q существует $n + 1$ точка $t_0, t_1, \dots, t_n$, в которых $|F(a, t_k)| = \varphi(a)$, а знаки $\xi_k = \text{sign } F(a, t_k)$ связаны соотношением

$$\xi_k = (-1)^k \xi_0 \cdot \text{sign } \frac{\Delta_k}{\Delta_0}, \quad k \in 1:n, \quad (3)$$

где Δ_k — определитель, составленный из столбцов

$$\frac{\partial F(a, t_0)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial F(a, t_{k-1})}{\partial x}, \frac{\partial F(a, t_{k+1})}{\partial x}, \dots, \frac{\partial F(a, t_n)}{\partial x}.$$

Кроме того найдутся $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\varphi(x) \geq \varphi(a) + \gamma \|x - a\| \quad \text{при} \quad \|x - a\| \leq \delta. \quad (4)$$

Теорема 2. Пусть для некоторого $a \in R^n$ значение $\varphi(a)$ достигается в $n + 1$ точке $t_0, t_1, \dots, t_n$ из Q , причем определители Δ_k отличны от нуля и знаки $\xi_k = \text{sign } F(a, t_k)$ связаны соотношением (3).

Тогда a является точкой строгого локального минимума функции $\varphi(x)$ и, более того, выполнено (4).

З а м е ч а н и е. Пусть Q — компакт на вещественной оси и

$$F(x, t) = x_1 u_1(t) + \dots + x_n u_n(t) - f(t),$$

где $f(t)$ — непрерывная на Q функция, а $\{u_i(t)\}$ — система Чебышева на Q . Тогда система (2) является чебышевской при любом $a \in R^n$. Кроме того функция $\varphi(x)$ выпукла на R^n , поэтому ее точка строгого локального минимума является точкой глобального минимума и притом единственной. Таким образом, из теорем 1 и 2 следует обобщенная теорема Чебышева (1) (см. также (5)).

2°. Доказательство теорем 1 и 2 опирается на следующие предложения теории минимакса.

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна вместе с $\partial f(x, y) / \partial x$ на $R^n \times D$, где D — некоторый компакт. Положим

$$\varphi(x) = \max_{y \in D} f(x, y),$$

$$R(x) = \{y \in D \mid f(x, y) = \varphi(x)\},$$

$$L(x) = \text{co} \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \mid y \in R(x) \right\}.$$

Предложение 1. Если $a \in R^n$ — точка минимума функции $\varphi(x)$ на R^n , то $0 \in L(a)$ (см. (2), стр. 243).

Предложение 2. Если 0 — внутренняя точка множества $L(a)$, то существуют $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\varphi(x) \geq \varphi(a) + \gamma \|x - a\| \quad \text{при} \quad \|x - a\| \leq \delta$$

(см. (2), стр. 82, 87).

В дальнейшем будет полезна также

Лемма. Пусть столбцы $b_0, b_1, \dots, b_n$ таковы, что определители $\Delta_k = |b_0 \dots b_{k-1} b_{k+1} \dots b_n|$ при всех $k \in 0:n$ отличны от нуля. Пусть, далее, каждое из чисел $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ равно $+1$ или -1 .

Тогда равносильны два утверждения:

а) $\xi_k = (-1)^k \xi_0 \cdot \text{sign} \frac{\Delta_k}{\Delta_0}, k \in 1:n;$

б) система уравнений

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \xi_k b_k = 0 \quad (5)$$

имеет решение, в котором все α_k положительны.

3°. Доказательство теоремы 1. Положим $D = Q \times \{-1, 1\}$, $y = (t, \xi) \in D$, $f(x, y) = \xi F(x, t)$. Тогда

$$\varphi(x) = \max_{t \in Q} |F(x, t)| = \max_{y \in D} f(x, y),$$

$$R(a) = \{(t, \xi) \in D \mid \xi F(a, t) = \varphi(a)\},$$

$$L(a) = \text{co} \left\{ \xi \frac{\partial F(a, t)}{\partial x} \mid (t, \xi) \in R(a) \right\}.$$

В силу предложения 1 существуют различные пары $(t_k, \xi_k) \in R(a)$, $k \in 0:r$, $r \leq n$, и положительные числа $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ такие, что

$$\sum_{k=0}^r \alpha_k \xi_k \frac{\partial F(a, t_k)}{\partial x} = 0, \quad \sum_{k=0}^r \alpha_k = 1. \quad (6)$$

По определению $R(a)$ будет $|F(a, t_k)| = \varphi(a)$ и $\xi_k = \text{sign} F(a, t_k)$. Отсюда, в частности, следует, что точки t_k попарно различны. Так как векторы $\frac{\partial F(a, t_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(a, t_1)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial F(a, t_r)}{\partial x}$ при $r \leq n-1$ по условию линейно независимы, то при $r \leq n-1$ равенства (6) невозможны. Поэтому $r = n$.

Столбцы $b_k = \frac{\partial F(a, t_k)}{\partial x}$, $k \in 0:n$, удовлетворяют условию леммы, а

$\xi_k = \pm 1$. По лемме $\xi_k = (-1)^k \xi_0 \cdot \text{sign} \frac{\Delta_k}{\Delta_0}$, $k \in 1:n$. Таким образом, выполнено (3) и первая часть теоремы доказана.

Неравенство (4) следует из предложения 2. Действительно, векторы

$$\xi_k \frac{\partial F(a, t_k)}{\partial x} - \xi_0 \frac{\partial F(a, t_1)}{\partial x}, \quad k \in 1:n,$$

линейно независимы, ибо иначе равенства (6) выполнялись бы при $r \leq n$. Поэтому в силу (6)

$$0 \in \text{int co} \left\{ \xi_k \frac{\partial F(a, t_k)}{\partial x} \mid k \in 0:n \right\} \subset \text{int } L(a),$$

т. е. 0 является внутренней точкой множества $L(a)$.

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, теорема 1 остается справедливой, если Q — компакт на вещественной оси, а система (2) является чебышевской на некотором отрезке, содержащем Q . Если при этом считать, что $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, то знаки всех определителей Δ_k будут одинаковыми, так что (3) перепишется в виде

$$\xi_k = (-1)^k \xi_0, \quad k \in 1:n.$$

З а м е ч а н и е 2. Из теоремы 1 легко следуют (в части необходимости) теорема Чебышева о наилучшей дробно-рациональной аппроксимации (см., например, (3), стр. 66) и теорема Райса о наилучшей аппроксимации экспонентами (4).

Доказательство теоремы 2. Положим $b_k = \frac{\partial F(a, t_k)}{\partial x}$, $k \in 0:n$. По условию выполнено (3), поэтому по лемме существуют положительные числа $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ такие, что

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \xi_k \frac{\partial F(a, t_k)}{\partial x} = 0.$$

Можно считать, что $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. Поскольку $(t_k, \xi_k) \in R(a)$ при всех $k \in 0:n$, то $0 \in L(a)$. Более того, $0 \in \text{int } L(a)$ (доказательство такое же, как в теореме 1). Остается сослаться на предложение 2. Теорема доказана.

4°. Следующее утверждение является обобщением теоремы Валле — Пуссена (1, 5).

Теорема 3. Пусть для некоторого $a \in R^n$ найдлись $n+1$ точка $t_0, t_1, \dots, t_n$ из Q такие, что определители Δ_k при всех $k \in 0:n$ отличны от нуля, а знаки $\xi_k = \text{sign } F(a, t_k)$ связаны соотношением (3). Пусть также функция

$$\varphi(x) = \max_{k \in 0:n} \{ \xi_k (F(x, t_k) - F(a, t_k)) \}$$

выпукла на R^n .

Тогда

$$\inf_{x \in R^n} \varphi(x) \geq \min_{k \in 0:n} |F(a, t_k)|.$$

Доказательство легко следует из одной теоремы теории минимакса (см. (2), стр. 92).

Заметим, что если $F(x, t) = x_1 u_1(t) + \dots + x_n u_n(t) - f(t)$, то функция $\varphi(x)$ выпукла. Поэтому теорема 3 может оказаться полезной при оценке снизу величины наилучшего приближения функций одной и нескольких переменных.

В заключение авторы благодарят И. К. Даугавета за обсуждение результатов работы и ценные советы.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
19 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. Я. Ремез, Про методи найкращого, в розумінні Чебишова, наближеного представлення функцій, Київ, 1935. ² В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов, Введение в минимакс, М., 1972. ³ Н. И. Ахизер, Лекции по теории аппроксимации, М., 1965. ⁴ J. R. Rice, J. Soc. Industr. Appl. Math., 10, № 1, 149 (1962). ⁵ С. И. Зуховицкий, УМН, 11, № 2, 123 (1956).