

УДК 539.125+523.4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Д. А. КОЖЕВНИКОВ, Ш. К. НАСИБУЛЛАЕВ

НЕКАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 9 II 1972)

В основе математической теории переноса частиц в веществе лежит линеаризованное уравнение Больцмана (уравнение переноса):

$$\hat{A}\Psi(x_0|x) \equiv [\hat{L}(u, \omega) - \hat{K}]\Psi(x_0|x) = \delta(x - x_0), \quad (1)$$

где x — вектор точки фазового пространства, $x \equiv \{\xi, u, \omega\}$, $\xi \equiv (r, t)$; $\Psi(x)$ — плотность столкновений; $\hat{L}(u, \omega)$ — дифференциальный оператор переноса, являющийся элементом параметрического семейства операторов, действующих на функции переменных x :

$$\hat{L}(u, \omega) \Psi(x) = \left[\tau(u) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda(u) \omega \nabla + 1 \right] \Psi(x); \quad \nabla \equiv \nabla_r;$$

$\tau(u)$ — время свободного пробега, $\lambda(u)$ — длина свободного пробега, u — летаргия (энергия) частиц. Оператор столкновений $\hat{K}$ определен правилом

$$\begin{aligned} [\hat{K}a](u, \omega) &\equiv \hat{K}(u', \omega' | u, \omega) a(u', \omega') = \\ &= \int d\omega' \int du' h(u') W(u', \omega' | u, \omega) a(u', \omega') \end{aligned}$$

для любой функции $a = a(u, \omega)$ переменных $u \in [u^+, \infty)$, $\omega \in \Omega$, для которой это выражение имеет смысл. Здесь $W(u', \omega' | u, \omega)$ — индикатриса рассеяния, $h(u)$ — полная вероятность рассеяния в соударении, $1 - h(u) = g(u)$ — полная вероятность поглощения.

Наряду с $\hat{K}$ будем рассматривать параметрическое семейство операторов $\hat{K}^+ \equiv \hat{K}^+(u^+)$, действующих на те же функции:

$$\begin{aligned} [\hat{K}^+a](u^+, \omega) &= \hat{K}(u^+, \omega' | u, \omega) a(u^+, \omega) = \\ &= h(u^+) \int d\omega' W(u^+, \omega' | u, \omega) a(u^+, \omega'). \end{aligned}$$

Предполагается, что все пространство заполнено веществом, свойства которого не зависят от ξ .

Помимо уравнения (1), которое будем называть каноническим, можно рассматривать и другие, неканонические, формы этого уравнения, примерами которых служат уравнение Пайерлса ⁽¹⁾, и уравнение Вейнберга — Вигнера — Корнголда — Орлова (В. В. К. О.) ^(2, 3, 8). И. А. Козачок ⁽⁴⁾ получил неканоническую форму уравнения (1), имеющую вид интегрального соотношения между функциями распределения частиц в поглощающих и непоглощающих средах. В работе ⁽⁵⁾ показано, что уравнение В.В.К.О. является простейшим частным случаем одной из общих неканонических форм (1). В этой заметке мы намечаем общий метод получения неканонических форм уравнения переноса, не давая их строгого математического обоснования, необходимого в каждой конкретной задаче.

Представим оператор $\hat{A}$ как сумму двух операторов (не конкретизируя их), $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$. Тогда (1) переписется в виде

$$\hat{B}\Psi(x_0|x) = \delta(x - x_0) - \hat{C}\Psi(x_0|x).$$

Вводя функцию Грина * $H(x_0|x)$ оператора $\hat{B}$, $\hat{B}H(x_0|x) = \delta(x - x_0)$, получаем интегральное уравнение, эквивалентное (1):

$$\Psi(x_0|x) = H(x_0|x) - \int dx' H(x'|x) \hat{C} \Psi(x_0|x'). \tag{2}$$

В частном случае $\hat{B} = \hat{A} - g(u) \equiv \hat{B}_1 h(u)$ уравнение (2) переходит в

$$h(u) \Psi(x_0|x) = G_s(x_0|x) - \int dx' G_s(x'|x) g(u') \Psi(x_0|x'), \tag{3}$$

где $G_s(x_0|x)$ — функция Грина оператора $\hat{B}_1$ (см. табл. 1, случай 6°). Уравнение (3) совпадает с уравнением Козачка (4).

Т а б л и ц а 1

Операторы, порождающие неканонические формы
уравнения переноса

	$\hat{B}$	$\hat{C}$
1°	$\tau(u) \partial/\partial t + h(u)$	$\lambda(u) \omega \nabla + g(u) - \hat{K}$
2°	$\tau(u) \partial/\partial t + \lambda(u) \omega \nabla + h(u)$	$g(u) - \hat{K}$
3°	$\lambda(u) \omega \nabla + h(u)$	$\tau(u) \partial/\partial t + g(u) - \hat{K}$
4°	$h(u)$	$\tau(u) \partial/\partial t + \lambda(u) \omega \nabla + g(u) - \hat{K}$
	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$
5°	$\tau(u) \partial/\partial t + h(u) : -\hat{K}$	$\lambda(u) \omega \nabla + g(u)$
6°	$\tau(u) \partial/\partial t + \lambda(u) \omega \nabla + h(u) : -\hat{K}$	$g(u)$
7°	$\lambda(u) \omega \nabla + h(u) : -\hat{K}$	$\tau(u) \partial/\partial t + g(u)$
8°	$h(u) : -\hat{K}$	$\tau(u) \partial/\partial t + \lambda(u) \omega \nabla + g(u)$

Конкретизация операторов $\hat{B}$ и $\hat{C}$ (см. табл. 1) в уравнении (2) порождает различные неканонические формы (1). Эти формы имеют смысл интегральных соотношений, выражающих распределение $\Psi(x)$ через пространственно-однородное нестационарное (табл. 1, случай 5°), стационарное пространственно-неоднородное (7°) и стационарное пространственно-однородное (8°) распределения частиц для монопроведенных источников. Ниже рассматривается группа неканонических форм, отвечающих

* Во многих задачах теории переноса для бесконечного пространства (например, в односкоростных задачах, являющихся частным случаем задачи (1)), однородные уравнения обладают нетривиальными решениями, в связи с чем возникает проблема однозначного определения соответствующих функций Грина. Эта однозначность достигается постановкой подходящих условий на бесконечности. Не вдаваясь в детали, всюду считаем, что соответствующие условия на бесконечности поставлены, так что все выступающие функции Грина определены некоторым однозначным образом.

включению оператора столкновений $\hat{K}$ в состав $\hat{B}$ (в табл. 1 случаи 5° — 8°). В этом случае $\hat{C}$ есть дифференциальный оператор, $\hat{C} \equiv \hat{L}_2$.

Выделим функцию $\tilde{\psi}$ распределения нерассеянных частиц

$$\Psi(x) = \psi(\xi, u, \omega) + \tilde{\psi}(\xi, u^+, \omega) \delta(u - u^+) \quad (4)$$

и положим $\hat{L} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2 \equiv h(u) \hat{L}_1 + \hat{L}_2$. Тогда вместо (1) получим систему

$$\hat{L}(u^+, \omega) \tilde{\psi}(\xi, u^+, \omega) = \delta(\xi - \xi') \delta(\omega - \omega^+); \quad (5')$$

$$\hat{L}_s(u, \omega) h(u) \psi(x) = \hat{K}^+(u^+) \tilde{\psi}(\xi, u^+, \omega) + \hat{K} \psi(x) - \hat{L}_2(u, \omega) \psi(x). \quad (5'')$$

Пусть $G(\xi|x)$ — функция Грина оператора $\hat{L}_s$, определенная для всех $\xi' = (r_0, t_0)$, $r_0 \in R^3$, $t_0 \in (-\infty, \infty)$ и $x \equiv (r, t, u, \omega)$, $r \in R^3$, $t \in (-\infty, \infty)$, $u \geq u^+$, $\omega \in \Omega$; при этом $G(\xi|x) = 0$, если $t < t_0$. Тогда (5'') может быть преобразовано к интегральному уравнению

$$h(u) \psi(x) = (\hat{P}h\psi)(x) + F(x), \quad (6)$$

где

$$(\hat{P}\chi)(x) \equiv \hat{K}(u', \omega' | u, \omega) h^{-1}(u') \int d\xi' G(\xi' | x) \chi(x');$$

$$F(x) = F^+(x) - F^-(x);$$

$$\begin{aligned} F^+(x) &= \hat{K}(u', \omega' | u, \omega) \int d\xi' G(\xi' | x) \tilde{\psi}(x') \delta(u' - u^+) \equiv \\ &\equiv [\hat{P}(h(u') \tilde{\psi}(x') \delta(u' - u^+))](x) \end{aligned} \quad (7)$$

— известная плотность столкновений в элементе объема около x для однократно рассеянных частиц;

$$F^-(x) = \int d\xi' [\hat{L}_2(u, \omega) \psi](\xi', u, \omega) G(\xi' | x). \quad (7')$$

Формальное решение уравнения (6) представляется рядом Неймана

$$h(u) \psi(x) = F(x) + \hat{R}F(x), \quad (8)$$

где

$$\hat{R} = \sum_{v=1}^{\infty} \hat{P}^v = \hat{P} + \hat{P}\hat{R} = \hat{P} + \hat{R}\hat{P}. \quad (9)$$

Оператор $\hat{R} \equiv \hat{R}(x'|x)$ интегральный с ядром $R(x'|x)$, которое мы назовем обобщенной функцией Плачека (о.ф.П.) (эта функция является обобщением известной в теории замедления нейтронов функции Плачека):

$$R(x'|x) = \sum_{v=1}^{\infty} R_v(x'|x),$$

$$R_1(x'|x) = \begin{cases} W(u', \omega' | u, \omega) G(\xi' | x) & \text{при } u' < u \\ 0 & \text{при } u' > u \end{cases} \equiv \tilde{W}(x'|x),$$

$$R_{v+1}(x'|x) = \int dx'' \tilde{W}(x' | x'') R_v(x'' | x).$$

Из (9) следует уравнение, которому удовлетворяет о.ф.П.:

$$R(x'|x) = \tilde{W}(x'|x) + \int dx'' \tilde{W}(x' | x'') R(x'' | x). \quad (10)$$

Неканоническое уравнение (10), имеющее вид типичного уравнения теории случайных блужданий, есть не что иное, как уравнение переноса в интегральной форме (см. также (6, 7)).

Положим $\chi(\mathbf{x}') = h(u')\tilde{\psi}(\mathbf{x}')\delta(u' - u^+)$. Тогда

$$\begin{aligned} F^+(\mathbf{x}) + \hat{R}F^+(\mathbf{x}) &= [(\hat{\mathbf{P}} + \hat{R}\hat{\mathbf{P}})\chi](\mathbf{x}) = (\hat{R}\chi)(\mathbf{x}) \equiv \\ &\equiv h(u^+)\int d\omega' \int d\xi' R(\xi', u^+, \omega' | \mathbf{x}) \tilde{\psi}(\xi', u^+, \omega'). \end{aligned} \quad (11)$$

Кроме того,

$$\hat{L}_s F^-(\mathbf{x}) = \int d\xi' [\hat{L}_2(u, \omega)\psi](\xi', u, \omega) \hat{L}_s G(\xi' | \mathbf{x}) \equiv [\hat{L}_2(u, \omega)\psi](\mathbf{x}). \quad (12)$$

Действуя оператором $\hat{L}_s$ на уравнение (8) и учитывая (11) и (12), получаем окончательно

$$\begin{aligned} \hat{L}(u, \omega)\psi(\mathbf{x}) &= -\int d\mathbf{x}' R(\mathbf{x}' | \mathbf{x}) [\hat{L}_2(u', \omega')\psi](\mathbf{x}') + \\ &+ h(u^+) \hat{L}_s(u^+, \omega) \int d\omega' \int d\xi' R(\xi', u^+, \omega' | \mathbf{x}) \tilde{\psi}(\xi', u^+, \omega'). \end{aligned} \quad (13)$$

(13) есть общая форма неканонических уравнений. По всей структуре она аналогична канонической, в которой вместо индикатрисы рассеяния выступает оператор $R\hat{L}_2$. Отсюда легко получить некоторые уже известные неканонические уравнения. Например, если выбрать $\hat{L}_2$ в соответствии с 8^о табл. 1, то (13) перейдет в

$$\begin{aligned} \hat{L}(u, \omega)\psi(\mathbf{x}) &= -\int d\omega' \int du' R(u', \omega' | u, \omega) \left[\tau(u') \frac{\partial}{\partial t} + \lambda(u') \omega' \nabla + \right. \\ &\left. + g(u') \right] \psi(\xi, u', \omega') + h(u^+) \int d\omega' R(u^+, \omega' | u, \omega) \tilde{\psi}(\xi, u^+, \omega'). \end{aligned} \quad (14)$$

Это уравнение совпадает с уравнением В.В.К.О. в стационарном пространственно-однородном случае.

Таким образом, использование неканонических форм уравнения переноса сводит задачу (1) к решению последовательности уравнений (5'), (10), (13). Замена таблицы операторов $\hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$ таблицей сопряженных операторов $\mathbf{B}^*, \hat{\mathbf{C}}^*$ позволяет легко получить неканонические формы для сопряженного уравнения переноса.

Приносим глубокую благодарность М. В. Масленникову за ценные замечания и большую помощь в работе.

Институт нефтехимической и газовой промышленности
им. И. М. Губкина
Москва

Поступило
21 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ R. Peierls, Proc. Cambr. Phil. Soc., **35**, 640 (1939). ² Л. Дреснер, Резонансное поглощение в ядерных реакторах, М., 1962. ³ N. Corngold, Proc. Phys. Soc. A, **70**, 793 (1957). ⁴ И. А. Розачок, Укр. физ. журн., **VII**, 676 (1962). ⁵ Д. А. Кожевников, В. С. Хавкин, Атомная энергия, **27**, 8, 142 (1969). ⁶ А. Вейнберг, Е. Вигнер, Физическая теория ядерных реакторов, М., ИЛ, 1961. ⁷ E. Guth, E. Inonu, Phys. Rev., **118**, № 4, 899 (1960). ⁸ В. В. Орлов, Отчет Физико-энергетического инст. АН СССР, 1956 (не опубликовано).