

УДК 517.12:519.51

МАТЕМАТИКА

Н. Н. НЕПЕЙВОДА

СООТНОШЕНИЕ ПРЕДИКАТИВНОЙ ОСМЫСЛЕННОСТИ И ИНТУИЦИИ ВСЕОБЩНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 29 XII 1972)

В статье изучается понятие предикативной осмысленности.

В конструктивной математике естественно использовать понятие множества как вспомогательную абстракцию при условии, что все вводимые множества однозначно задаются формулой некоторого языка, а все высказывания, содержащие множества, должны в конце концов сводиться к элементарным.

Дадим определение языков Π и Δ , которые при помощи гёделевской нумерации позволяют говорить о множествах, задаваемых формулами этих языков.

Определение 1. Язык Π .

Термы: натуральные числа, переменные для натуральных чисел — $x, y, z, \dots$, выражения вида $f_n(t_1, \dots, t_n)$, где $t_1, \dots, t_n$ — термы, f_n — n -местная примитивно-рекурсивная функция (п.р.ф.).

Формулы:

- а) если t и u — термы, то $(t = u)$ — формула;
- б) если A — формула, X — переменная, то $\forall X A$ — формула;
- в) если A — формула, X — переменная, t — терм, то $(t \in \ulcorner X A \urcorner)$ — формула;
- г) если t и u — термы, то $(t \in u)$ — формула.

Если A — формула, X — переменная, то выражение $\ulcorner X A \urcorner$ называется предикатором. Предикаторы обозначают множества тех натуральных чисел, которые обладают свойством A .

Хотя в самом языке у нас квантор $\forall$ связывает переменные для натуральных чисел, а переменные для множеств отсутствуют, наличие формул вида г), которые читаются как « t принадлежит множеству с номером u », позволяет нам строить сложные высказывания о множествах.

Уточнением этих слов служит следующее понятие расшифровки. Обычным образом введем понятия замкнутых термов, формул, предикаторов и фиксируем гёделеву нумерацию предикаторов. $A(X|t)$ означает результат подстановки терма t в формуле A вместо переменной X . Определим алгоритм расшифровки ρ , действующий над замкнутыми формулами вида $(t \in Q)$.

Определение 2. Пусть M^n — замкнутый предикатор с гёделевым номером n , если таковой имеется, и $\ulcorner x(0 = 1) \urcorner$ иначе. Пусть $\mathfrak{z}$ — алгоритм вычисления значения замкнутого терма. Положим

$$\rho_{\ulcorner}(t \in \ulcorner X A \urcorner)_{\ulcorner} \rightleftharpoons A(X|t),$$

$$\rho_{\ulcorner}(t \in u)_{\ulcorner} \rightleftharpoons (t \in M^{\ulcorner u \urcorner}).$$

Формула $\rho_{\ulcorner} A_{\ulcorner}$ называется расшифровкой формулы A .

Определение 3. Смысл замкнутых формул языка Π . Смысл определяется индуктивно.

Элементарная формула выражает равенство значений двух термов. Формула вида $\forall X A$ выражает наличие общего метода установления истинности $A(X|n)$ при любом n . Формула вида $(t \in Q)$ выражает то же, что и ее расшифровка. $\models_{\Pi} A$ будет означать «истинна в языке Π формула A ».

Другими словами, $\models_{\Pi} A$ тогда и только тогда, когда A выводима в следующей полужормальной системе:

Аксиомы: $(t = u)$ при $(\exists_{\perp} t \perp \equiv \exists_{\perp} u \perp)$.

Правила вывода:

$$\frac{\text{для всех } n \ A(X|n)}{\forall X A}, \quad \frac{\rho_{\perp} A \perp}{A}.$$

Из неэлементарных логических средств язык Π использует лишь интуицию всеобщности ⁽¹⁾.

Определение 4 (индуктивное). П.р.ф. f записывает n ($f3n$) тогда и только тогда, когда $f(n) = 0$ или же $f3n * [m]$ для всех m . (Здесь и в дальнейшем $[m_1, \dots, m_k]$ обозначает натуральное число, являющееся гёделевым номером этого кортежа ⁽²⁾, а $n * l$ — операцию соединения кортежей.)

Определение 5. Язык Δ .

Аналогично определению языка Π , с добавлением еще одного порождающего правила:

д) Если A и B — формулы, то $(A \supset B)$ — формула.

В дальнейшем под словами терм, формула, предикатор подразумеваются замкнутые терм, формула, предикатор, если явно не оговорено противное. Слова русского языка иногда будут заменяться логическими символами, отличающимися от символов формальной системы наличием точки. Формулы языка Δ выражают возможность построения пары $\langle \alpha, n \rangle$, где α — конструктивный ординал Клини ⁽⁴⁾, а n — число, кодирующее обоснование данной формулы. Точно это выражает

Определение 6. Пусть α — клиниевский ординал. Определим индукцией по α одновременно два понятия: « n реализует на уровне α формулу A ($n[R]_{\alpha} A$)» и « n виртуально реализует на уровне α формулу A ($n[CR]_{\alpha} A$)»:

$$1) \ n[R]_{\alpha}(t = u) \Leftrightarrow n[CR]_{\alpha}(t = u) \Leftrightarrow \exists_{\perp} t \perp \equiv \exists_{\perp} u \perp.$$

$$1a) \ n[CR]_{0} A, \ A \text{ — неэлементарна.}$$

$$2) \ n[R]_{2^{\alpha}}(A \supset B) \Leftrightarrow \forall x(x[CR]_{\alpha} A \Rightarrow !\{n\}(x) \ \& \ \{n\}(x)[R]_{\alpha} B);$$

$$2a) \ n[CR]_{2^{\alpha}}(A \supset B) \Leftrightarrow \forall x(x[R]_{\alpha} A \Rightarrow !\{n\}(x) \ \& \ \{n\}(x)[CR]_{\alpha} B).$$

$$3) \ n[R]_{2^{\alpha}} \forall X A \Leftrightarrow \forall m(!\{n\}(m) \ \& \ \{n\}(m)[R]_{\alpha} A(X|m));$$

$$3a) \ n[CR]_{2^{\alpha}} \forall X A \Leftrightarrow \forall m(!\{n\}(m) \ \& \ \{n\}(m)[CR]_{\alpha} A(X|m)).$$

$$4) \ n[R]_{2^{\alpha}}(t \in Q) \Leftrightarrow n[R]_{\alpha \rho_1}(t \in Q) \perp;$$

$$4a) \ n[CR]_{2^{\alpha}}(t \in Q) \Leftrightarrow n[CR]_{\alpha \rho}(t \in Q) \perp.$$

$$5) \ n[R]_{3,5} A \Leftrightarrow \exists m \ n[R]_{(1)m} A;$$

$$5a) \ n[CR]_{3,5} A \Leftrightarrow \forall m \ n[CR]_{(1)m} A.$$

Виртуальную реализуемость можно истолковать как возможность того, что n на более высокой ступени реализует A .

Формула A языка Δ истинна ($\models A$), когда существуют n и α , такие, что $n[R]_{\alpha} A$, ложна ($\models A$), когда существуют n и α такие, что $n[R]_{\alpha}(A \supset (0 = 1))$.

Теорема 1. Для каждой п.р.ф. $f(x, y)$ можно примитивно-рекурсивно построить предикатор M языка Π такой, что

$$\lambda x f(x, n) \neq 0 \Leftrightarrow \models_{\Pi}(n \in M), \quad (1)$$

и наоборот, для всякого предикатора M языка Π можно построить п.р.ф. $f(x, y)$ такую, что верно (1).

Теорема 2. Формула A языка Δ истинна (ложна) тогда и только тогда, когда в следующей полуформальной системе выводима секвенция $\rightarrow A$ ($A \rightarrow$):

Аксиомы:

$\Gamma \rightarrow \theta(t = u)$ (при $\mathfrak{z}_L t \perp + \mathfrak{z}_L u \perp$); $(t = u) \Gamma \rightarrow \theta$ (при $\mathfrak{z}_L t \perp \neq \mathfrak{z}_L u \perp$).

Правила вывода:

$$\frac{\frac{A\Gamma \rightarrow \theta B}{\Gamma \rightarrow \theta(A \supset B)}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow \theta A \quad B\Gamma \rightarrow \theta}{(A \supset B)\Gamma \rightarrow \theta},}{\Gamma \rightarrow \theta A(X|0), \dots, \Gamma \rightarrow \theta A(X|n), \dots, \quad \frac{A(X|t) \forall X A\Gamma \rightarrow \theta}{\forall X A\Gamma \rightarrow \theta},}$$

$$\frac{\frac{\rho_L A \perp \Gamma \rightarrow \theta}{A\Gamma \rightarrow \theta}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow \theta \rho_L A \perp}{\Gamma \rightarrow \theta A}.$$

Это показывает, что классическая логика приемлема в данном случае, поскольку наш язык содержит логические связки $\forall$ и $\supset$, которые ведут от нормальных формул к нормальным ⁽³⁾. Полученная полуформальная система близка к системе теории множеств Аккермана (см. ⁽⁴⁾).

Теорема 3. Для каждого предикатора M языка Δ можно примитивно-рекурсивно построить предикатор N языка Π такой, что

$$\models (n \in M) \leftrightarrow \models_{\Pi} (n \in N).$$

Эта теорема есть следствие теорем 1 и 2. Сводимость по истинности формул языка Δ к формулам, использующим одну лишь интуицию всеобщности, показывает, что все классические предикативные рассуждения могут быть сведены к этому, на первый взгляд, простому и слабому, понятию.

В связи с тем, что истинность и ложность высказываний понимается через их сводимость к элементарным, у нас есть формулы, не являющиеся ни истинными, ни ложными. В частности, не всегда истинны даже формулы $(A \supset A)$. Если $(A \supset A)$ неистинна, A будем называть бессмысленной. В частности, бессмысленна формула $(k \in k)$, где k — номер $\ulcorner x(x \in x) \urcorner$. На любом уровне любое n виртуально реализует $(k \in k)$, но никакое n не реализует $(k \in k)$. Следующая теорема показывает, что бессмыслица в некотором смысле неустранима: у нас есть предикатор, неполный до всюду осмысленного.

Теорема 4. Если M — предикатор языка Δ такой, что

$$\models n \in M \Rightarrow \models n \in n,$$

$$\models n \in M \Rightarrow \not\models n \in n,$$

то существует такое m , что неистинно $m \in M \supset m \in M$.

Обычным образом введем сокращения $\neg$, $\&$.

Следующая теорема показывает полноту в некотором смысле языка Δ , а именно, любые две допустимые непересекающиеся области истинности и ложности могут быть объединены в одном предикаторе.

Теорема 5. Если M и N — предикаторы языка Δ , и их области истинности и ложности не пересекаются, то существует такой предикатор K , что $(n \in K)$ истинно тогда и только тогда, когда $\models (n \in M)$, и ложно тогда и только тогда, когда $\not\models (n \in N)$.

Следующая теорема устанавливает связь изложенных здесь понятий с обычными предикативными концепциями. Она верна классически и интуиционистски.

Рассмотрим обычный язык анализа с переменными для функций $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Π_1^1 — множеством называется множество, определяемое формулой вида $\forall \alpha A(\alpha)$, где $A(\alpha)$ не содержит кванторов по функциям. Множество гиперарифметическое, если оно одновременно Π_1^1 и дополнение к Π_1^1 .

Теорема 6. Для всякого предикатора M языка Δ можно построить множество X из класса Π_1^1 такое, что

$$\models (n \in M) \Leftrightarrow n \in X, \quad (2)$$

и наоборот, для каждого X можно построить такое M , что выполняется (2).

Предикатор M регулярен, если существует такой предикатор N , что

$$\models \forall x (x \in N \supset x \in N) \text{ и } \models n \in N \Leftrightarrow \models n \in M.$$

Теорема 7. Предикатор M языка Δ регулярен тогда и только тогда, когда множество $\{n \mid \models (n \in M)\}$ гиперарифметическое.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. А. Марков, Вестн. Московск. унив., № 2 (1970). ² С. К. Клини, Введение в метаматематику, ИК, 1957. ³ Н. А. Шанин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 52 (1958). ⁴ K. Schütte, Beweistheorie, Berlin, 1960.