

С. И. ПИСАНЕЦ

О МЕРАХ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ДИФФУЗИОННЫМ ПРОЦЕССАМ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 7 II 1973)

Пусть $\xi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, — последовательность диффузионных процессов, удовлетворяющих стохастическим дифференциальным уравнениям

$$d\xi_n(t) = a_n(t, \xi_n(t))dt + dw(t), \quad \xi_n(0) = \xi_{n,0}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ t \in [0, T], \quad (1)$$

и пусть выполнено

Условие 1. Найдутся положительные постоянные C и K такие, что

$$M|\xi_{n,0}|^v \leq C, \quad |a_n(t, x)| \leq K(1 + |x|), \quad n = 1, 2, \dots, \\ x \in (-\infty, \infty), \quad t \in [0, T].$$

В заметке приводятся результаты, касающиеся слабой компактности и слабой сходимости мер μ_n , соответствующих процессам $\xi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$

Теорема 1. Пусть выполнено условие (1). Тогда из последовательности марковских процессов $\xi_n(t)$ можно выделить подпоследовательность $\xi_{n_k}(t)$, слабо сходящуюся к непрерывному марковскому процессу $\xi_0(t)$.

При доказательстве теоремы 1 важную роль играет

Лемма 1. Пусть $a_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, — последовательность функций, удовлетворяющих условию 1, и пусть $f(x)$ произвольная непрерывная ограниченная функция в R^1 .

Тогда семейство функций $\{M_x f(\xi_n(t)), n = 1, \dots\}$ равномерно непрерывно по совокупности переменных на каждом компакте $[-N, N] \times [0, T]$, $N > 0$.

Лемма 1 позволяет из последовательности $\xi_n(t)$ выделить подпоследовательность $\xi_{n_k}(t)$ такую, что переходные вероятности процессов $\xi_{n_k}(t)$ как вероятностные меры слабо сходятся к некоторым предельным мерам, существование которых устанавливается с помощью теоремы Рисса о представлении линейного функционала в C_0 (5). Затем проверяется, что предельное семейство мер образует марковский процесс $\xi_0(t)$. При этом, как и при доказательстве леммы 1, используются оценки для математических ожиданий от плотностей мер, полученные в (4). Наконец, слабая сходимость мер μ_{n_k} к μ_0 выводится из леммы 1, условия 1 и одной общей предельной теоремы теории вероятностей (2, 3).

Теорема 2. Пусть выполнено условие (1) и пусть последовательность процессов $\xi_n(t)$ слабо сходится к непрерывному марковскому процессу $\xi_0(t)$.

Тогда найдутся измеримая функция $a_0(t, x)$ и винеровский процесс $\overline{w}(t)$ такие, что предельный процесс $\xi_0(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi_0(t) = a_0(t, \xi_0(t))dt + d\overline{w}(t), \quad \xi_0(0) = \xi_{0,0}, \quad t \in [0, T].$$

Доказательство теоремы 2 опирается на одну теорему о слабой сходимости мер (3), теорему Гирсанова (1, 6) и результаты по абсолютной непрерывности и эквивалентности мер, отвечающих непрерывным процессам, относительно винеровской (6). Сначала показывается, что мера μ_0 эк-

вивалентна винеровской, затем устанавливается, что процесс $\xi_0(t)$ является процессом диффузионного типа, и, наконец, доказывается существование функции $a_0(t, x)$, удовлетворяющей условиям теоремы.

Теорема 3. Пусть $\xi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, — последовательность процессов, удовлетворяющих уравнениям (1), и пусть выполнены условия (1) и (2): процесс $\xi_0(t)$ с отвечающей мерой μ_0 , абсолютно непрерывной относительно винеровской, является единственным непрерывным решением уравнения

$$d\xi_0(t) = a_0(t, \xi_0(t))dt + dw(t), \quad \xi_0(0) = \xi_{0,0}, \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Тогда, для того чтобы последовательность процессов $\xi_n(t)$ слабо сходилась к процессу $\xi_0(t)$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M \int_s^t f(\xi_n(s)) g(\xi_n(u)) a_n(u, \xi_n(u)) du &= \\ = M \int_s^t f(\xi_0(s)) g(\xi_0(u)) a_0(u, \xi_0(u)) du, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} M \int_0^t g(\xi_n(u)) du &= M \int_0^t g(\xi_0(u)) du, \\ \xi_{n,0} &\Rightarrow \xi_{0,0}, \end{aligned}$$

какими бы ни были ограниченные непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$, $s, t \in [0, T]$, $s < t$.

Теорема 4. Пусть процессы $\xi_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, являются решениями уравнений (1), (2) с коэффициентами сноса, не зависящими от перменной t , и пусть выполнены условия (1), (2) теоремы 3.

Тогда слабая сходимость последовательности коэффициентов сноса $a_n(x)$ к $a_0(x)$ на каждом компакте $[-N, N] \subset (-\infty, \infty)$, $N > 0$, является условием, необходимым и достаточным для того, чтобы последовательность процессов $\xi_n(t)$ слабо сходилась к процессу $\xi_0(t)$.

При выводе утверждений теорем 3 и 4 существенно используются теорема 1 и одна предельная теорема в (7) о возможности построения на некотором вероятностном пространстве последовательности процессов $\xi_n(t)$ такой, что меры μ_n совпадают с мерами μ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, и при каждом t из $[0, T]$ $\xi_n(t) \rightarrow \xi_0(t)$ по вероятности.

Автор искренне благодарен В. И. Иваненко и А. В. Скороходу за постановку задачи и помощь в работе.

Институт кибернетики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
25 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. В. Гирсанов, Теория вероятностей и ее применение, 5, 3, 314 (1960).
- ² И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, «Наука», 1965.
- ³ И. И. Гихман, А. В. Скороход, Теория случайных процессов, «Наука», 1970.
- ⁴ И. И. Гихман, А. В. Скороход, Стохастические дифференциальные уравнения, Киев, 1968.
- ⁵ Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, М., 1963.
- ⁶ Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Изв. АН СССР, сер. матем., 36, 4, 847 (1972).
- ⁷ А. В. Скороход, Исследования по теории случайных процессов, Киев, 1961.