Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 1

УДК 519.95 **КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ**

Р. И. ПОДЛОВЧЕНКО

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ПОДОБНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СХЕМ АЛГОРИТМОВ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 30 X 1972)

Рассматриваются недетерминированные схемы алгоритмов (кратко: R-схемы) и исследуется отношение подобия между ними ([1]).

Система правил подобного преобразования R-схем строится в виде исчисления R-схем. Формулы этого исчисления имеют вид $F_1 \sim F_2$, где F_1 и F_2 — фрагменты. Понятие фрагмента вводится таким образом, что сама R-схема представляет собой частный случай фрагмента и для каждого фрагмента F существует R-схема $\mathfrak{A}$, частью которой является фрагмент F (или R-схема $\mathfrak{A}$, содержащая фрагмент F).

Символ $\sim$, называемый знаком равносильности, интерпретируется как знак подобия, если F_1 и F_2 — R-схемы, В случае, когда фрагменты F_1 и F_2 не являются R-схемами, формулу вида $F_1 \sim F_2$ можно интерпретировать как сокращенную запись множества формул вида $\mathfrak{A}(F_1) \sim \mathfrak{A}(F_2)$, где $\mathfrak{A}(F_1)$ — произвольная R-схема, содержащая фрагмент F_1, а $\mathfrak{A}(F_2)$ — R-схема, полученная из $\mathfrak{A}(F_1)$ заменой фрагмента F_1 фрагментом F_2.

Аксиомы и правило вывода (оно одно) нашего исчисления можно рассматривать как правила тождественных преобразований R-схем, т. е. как правила, переводящие схемы в подобные им. Например, если формула $F_1 \sim F_2$ выводима в нашем исчислении, то, заменяя в любой R-схеме $\mathfrak{A}(F_1)$ фрагмент F_1 фрагментом F_2, мы получим R-схему $\mathfrak{A}(F_2)$, подобную R-схеме $\mathfrak{A}(F_1)$ (утверждение В).

Определения фрагмента, R-схемы и отношения подобия между R-схемами. Зададимся конечным множеством $X = \{x\}$ единиц информации и счетным множеством $\mathcal{T} = \{t\}$ вершин. В множестве $\mathcal{T}$ выделим элементы v_0 и v_{-1}, называемые *начальной* и соответственно *конечной вершиной*; остальные элементы $\mathcal{T}$ разобьем на два непересекающихся и счетных подмножества $V = \{v\}$ и $R = \{r\}$; элементы первого будем называть *операторными вершинами*, элементы второго — *фильтрами*. Любую упорядоченную пару (t, t') вершин назовем *дугой*.

Фрагментом назовем конечное множество F вершин и дуг, не содержащее дуг вида (t, v_0) и (v_{-1}, t) и такое, что каждому фильтру $r \in F$ сопоставлено некоторое множество $\alpha_r \subseteq X$ единиц информации (α_r называется *содержанием фильтра* $r \in F$).

Символом Λ будем обозначать пустой фрагмент.

Фрагмент F назовем *R-схемой*, если $v_0, v_{-1} \in F$ и, какой бы ни была дуга $(t', t) \in F$, $t' \in F$ и $t \in F$.

Таким образом, R-схема представляет собой конечный ориентированный граф с вершинами из $\mathcal{T}$ и такой, что ему принадлежат: вершина v_0 с пустым множеством входящих в нее дуг, вершина v_{-1} с пустым множеством исходящих из нее дуг; каждая из остальных вершин (будь то операторная вершина или фильтр) обладает конечным множеством входящих в нее и исходящих из нее дуг; каждому фильтру сопоставлено некоторое множество единиц информации.

Введем вспомогательный элемент v_{-2}, отличный от элементов множества $\mathcal{T}$; v_{-2} будем называть особой вершиной. Пусть $\mathfrak{A}$ — R-схема и $t, t' \in \mathfrak{A}$; будем говорить, что в R-схеме $\mathfrak{A}$:

1) вершина t' достижима из вершины t единицей информации $x \in X$, если в $\mathfrak{A}$ существует путь, который начинается в вершине t, заканчивается в вершине t' и, если и насчитывает другие вершины, то только фильтры, причем единица x принадлежит содержанию каждого из них;

2) из вершины t единицей информации $x \in X$ достижима особая вершина v_{-2}, если в $\mathfrak{A}$ существует путь, который начинается в вершине t, проходит только по фильтрам, x принадлежит содержанию каждого из них и среди этих фильтров по крайней мере один встречается дважды.

Возьмем R-схемы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ с одним и тем же множеством операторных вершин $\bar{V}$; назовем $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ *подобными*, какими бы ни были вершины t и t', где $t \in \bar{V} \cup \{v_0\}$, $t' \in \bar{V} \cup \{v_{-1}, v_{-2}\}$, и какой бы ни была единица информации $x \in X$, если в одной из схем вершина t' достижима из вершины t единицей x, то это же имеет место и в другой схеме.

Отношение подобия между R-схемами рефлективно, симметрично и транзитивно.

Система подобных преобразований R-схем. Предлагаемая нами система подобных преобразований R-схем (система 1—10) состоит из 9 аксиом и одного правила вывода.

Формулировка аксиомы $F_1 \sim F_2$ сводится к описанию фрагментов F_1 и F_2. Условимся при этом называть:

входом вершины $t \in F$ — множество всех таких вершин t', что $(t', t) \in F$;

выходом вершины $t \in F$ — множество всех таких вершин t', что $(t, t') \in F$;

внешним входом (выходом) вершины $t \in F$ — множество, полученное из входа (соответственно выхода) вершины $t \in F$ исключением самой вершины t;

особой дугой фрагмента F — дугу $(t', t) \in F$, для которой $t' \notin F$ и $t \notin F$.

Аксиома 1 (A1). *Каждый фрагмент равносилен самому себе.*

Аксиома 2 (A2). *Фрагмент, состоящий из фильтра с пустым содержанием, равносилен пустому.*

Аксиома 3 (A3). *Фрагмент, состоящий из фильтра r, для которого $\alpha_r = X$, равносилен фрагменту, который состоит из особых дуг, соединяющих любую вершину из входа фильтра r с любой вершиной из выхода фильтра r.*

Аксиома 4 (A4). *Фрагмент, состоящий из фильтра с пустым внешним входом, равносилен пустому.*

Аксиома 5 (A5). *Фрагмент, состоящий из фильтра с пустым выходом, равносилен пустому.*

Аксиома 6 (A6). *Фрагмент, состоящий из фильтра r, равносилен фрагменту, состоящему из фильтров r_1 и r_2, каждый из которых имеет те же внешние вход и выход, что и фильтр r, и обладает петлей, если r имеет петлю; содержания фильтров r_1 и r_2 в сумме составляют содержание фильтра r.*

Аксиома 7 (A7). *Фрагмент, состоящий из фильтра r, равносилен фрагменту, состоящему из фильтров r_1 и r_2, каждый из которых имеет те же внешний вход и содержание, что и фильтр r; если фильтр r обладает петлей, то хотя бы один из фильтров r_1 и r_2 обладает петлей; внешние выходы фильтров r_1 и r_2 в сумме составляют внешний выход фильтра r.*

Аксиома 8 (A8). *Фрагмент F, состоящий из фильтров r_1 и r_2, имеющих одинаковое содержание и связанных дугой (r_1, r_2), равносилен фрагменту, полученному из F отбрасыванием дуги (r_1, r_2) с одновременным добавлением к выходу фильтра r_1 внешнего выхода фильтра r_2; при этом, если фильтр r_2 имеет петлю, то фильтр r_1 тоже получает петлю.*

А к с и о м а 9 (А9). *Фрагмент F, состоящий из двух фильтров, связанных дугой и таких, что содержания фильтров пересекаются по пустому множеству, равносилен фрагменту, полученному из F опусканием связывающей фильтры дуги.*

Будем говорить, что фрагмент F с о д е р ж и т в с е б е ф р а г м е н т F' (и записывать это в виде $F(F')$), если: 1) все вершины и дуги фрагмента F' являются вершинами и дугами фрагмента F; 2) какой бы ни была вершина t, одновременно принадлежащая фрагментам F и F', ее вход (выход) в одном и другом фрагментах совпадают; кроме того, если t — фильтр, то он имеет одно и то же содержание в обоих фрагментах.

П р а в и л о в ы в о д а (П10).

$$\frac{\dashv F_1 \sim F_2,\ F_3(F_1) \sim F_4}{F_3(F_2) \sim F_4};$$

здесь $F_3(F_2)$ — фрагмент, полученный из $F_3(F_1)$ заменой фрагмента F_1 фрагментом F_2 (предполагается, что при этой замене не происходит коллизий вершин).

Отметим, что если придерживаться предложенной выше интерпретации формул $F_1 \sim F_2$, то не вызывают сомнений истинность каждой из аксиом А1 — А9 и истинность заключения правила П10 (при условии, что истинна посылка этого правила). Кроме того, основываясь на том, что любая R-схема есть фрагмент, и применяя правило П10, легко убедиться в справедливости утверждения В.

Для отношения равносильности между фрагментами, возникшего в связи с построением нашего исчисления, справедлива

Л е м м а 1. *Отношение равносильности между фрагментами является рефлективным, симметричным и транзитивным.*

П о л н о т а с и с т е м ы 1—10.

Т е о р е м а. *Если F-схемы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ подобны, то одна переводится в другую преобразованиями системы* 1—10, *выполненными в конечном числе.*

При доказательстве теоремы кроме леммы 1 (она обеспечивает обратимость каждого преобразования) используются леммы 2 и 3.

Л е м м а 2. *Какой бы ни была R-схема, преобразованиями системы* 1—10, *выполненными в конечном числе, она переводится в матричную R-схему.*

Введем понятие матричной R-схемы. Будем говорить, что в R-схеме $\mathfrak{A}$ фильтр r с в я з у е т в е р ш и н у t с в е р ш и н о й t' ($r, t, t' \in \mathfrak{A}$), если R-схеме $\mathfrak{A}$ принадлежат дуги, ведущие из t в r и из r в t'; случай, когда $t' = r$, будем описывать словами: в $\mathfrak{A}$ фильтр r связует вершину t с вершиной v_{-2}.

Обозначим через $V_{\mathfrak{A}}$ множество, состоящее из всех операторных вершин R-схемы $\mathfrak{A}$ и начальной вершины v_0, и через $V'_{\mathfrak{A}}$ — множество, которое состоит из всех операторных вершин схемы $\mathfrak{A}$, конечной вершины v_{-1} и особой вершины v_{-2}. R-схему $\mathfrak{A}$ назовем м а т р и ч н о й, если, какими бы ни были вершины $v \in V_{\mathfrak{A}}$ и $v' \in V'_{\mathfrak{A}}$, R-схеме $\mathfrak{A}$ принадлежит в точности один фильтр $r_{vv'}$, связующий вершину v с вершиной v' и только их, и в $\mathfrak{A}$ нет фильтров, отличных от описанных.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2 осуществляется непосредственным построением искомой матричной R-схемы. «Каноничность» матричной R-схемы вытекает из следующего утверждения.

Л е м м а 3. *Две матричные R-схемы подобны в том и только том случае, если совпадают множества их операторных вершин и содержания фильтров, связующих в одной и другой R-схеме одноименные вершины.*

С л е д с т в и е т е о р е м ы. *Существует алгоритм, который для любой пары R-схем устанавливает, являются они подобными или нет.*

Ереванский государственный
университет

Поступило
6 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. И. П о д л о в ч е н к о, ДАН, 207, № 4 (1972).