

С. С. РЫШКОВ

С-ТИПЫ n -МЕРНЫХ ПАРАЛЛЕЛОЭДРОВ

(Представлено академиком С. А. Соболевым 27 XII 1972)

1°. Великий русский кристаллограф Е. С. Федоров (1) чисто геометрическим способом открыл существование двух видов двумерных и пяти видов трехмерных параллелоэдров, т.е. выпуклых многоугольников (многогранников), заполняющих при помощи параллельных переносов всю плоскость (пространство) без пропусков и перекрытий; он же показал, что при $n = 2, 3$ других параллелоэдров не существует.

Г. Ф. Вороной в знаменитом мемуаре (2) исследовал так называемые примитивные параллелоэдры и показал, что каждый n -мерный примитивный параллелоэдр есть аффинный образ области действия (области Дирихле) некоторой вполне определенной данным параллелоэдром n -мерной решетки. В том же мемуаре Г. Ф. Вороной ввел понятие типа (примитивно го) параллелоэдра, дал алгоритм разыскания всех попарно неэквивалентных типов n -мерных параллелоэдров, а также полный вывод и описание всех типов примитивных n -мерных параллелоэдров при $n = 2, 3, 4$; таких типов оказалось соответственно 1, 1, 3.

Б. Н. Делоне (3-6) построил метод пустого шара, при помощи которого передоказал более простым способом часть результатов работы (2), нашел все непримитивные четырехмерные параллелоэдры и, совместно с Н. Н. Сандаковой (7), дал еще один алгоритм разыскания n -мерных параллелоэдров.

В последнее время в связи с прикладными задачами, в частности с задачей о решетчатых покрытиях n -мерного пространства, выяснилась (8-10) важность перечисления всех типов n -мерных параллелоэдров при $n > 4$. Однако проведение алгоритма Вороного (11, 12) приводит к колоссальным вычислительным трудностям и для $n = 5$ не дает искомого результата (в работе (11) названо 4 типа, в работе (12) названо 12 типов). Алгоритм Делоне — Сандаковой оказался практически непроходимым уже для $n = 4$ несмотря даже на то, что в работе (13) перечислены все возможные векторы смежности для формы, приведенной по Эрмиту — Минковскому ($n = 3, 4, 5$).

В этой заметке определяется С-тип, смежностный тип, n -мерного параллелоэдра, обладающий, в частности, следующими свойствами:

1. Каждый тип Вороного принадлежит только одному С-типу.
2. Каждому С-типу принадлежит конечное число типов Вороного.
3. Если некоторые два типа Вороного эквивалентны, то эквивалентны и содержащие их С-типы.

В заметке дан алгоритм разыскания в конечное число шагов всех общих С-типов для любого n . В качестве примера найдены все общие С-типы для $n = 5$, их оказалось 76. Это, в частности, дает оценку числа типов Вороного при $n = 5$.

В дальнейшем изложении мы будем считать известными все понятия и обозначения работ (2, 6).

2°. Пусть дано два набора, две строки, целых чисел $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ и $l' = (l'_1, l'_2, \dots, l'_n)$. Скажем, что строка l сравнима со строкой l' (по модулю 2), если $l_i \equiv l'_i \pmod{2}$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Строку $I = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, состоящую из нулей и единиц, где $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 > 0$, мы будем назы-

вать n -мерным индексом. Отметим, что множество индексов содержит $2^n - 1$ элементов. Мы будем считать, что все индексы занумерованы в произвольном фиксированном порядке числами $1, 2, \dots, 2^n - 1$.

Определение 1. Пусть $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — положительная квадратичная форма от n переменных и пусть I_σ — произвольный индекс. Тогда скажем, что форма f принадлежит предтипу $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ по индексу I_σ , если строка l сравнима с индексом I_σ , а также дает арифметический минимум формы f на множестве всех строк, сравнимых с индексом I_σ .

Отметим, что форма f , принадлежащая предтипу l , принадлежит и предтипу $-l$. Форма f , принадлежащая по индексу I_σ только двум предтипам l и $-l$, называется общей формой предтипа l ($-l$) по индексу I_σ .

Определение 2. Положительная форма $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принадлежит С-типу Δ , определяемому набором строк

$$l_\sigma = (l_{\sigma 1}, l_{\sigma 2}, \dots, l_{\sigma n}), \quad (1)$$

где $\sigma = 1, 2, \dots, 2^n - 1$, если для каждого σ она принадлежит предтипу $l_\sigma = (l_{\sigma 1}, l_{\sigma 2}, \dots, l_{\sigma n})$ по индексу I_σ .

Теорема 1. С-типы удовлетворяют всем условиям, перечисленным в 1°.

Эта теорема фактически очевидна, так как строки (1) суть координатные строки векторов смежности, а в определении типа Вороного участвуют не только координаты всех векторов смежности, но и группировки их по L -симплексам, причем таких группировок для каждого набора строк вида (1) лишь конечное число.

Обычным образом определяем в пространстве коэффициентов форм от n переменных область С-типа, тогда теореме 1 можно дать такую формулировку:

Теорема 1'. Разбиение конуса K , см. (14), на области типов Вороного есть конечное подразделение разбиения конуса на области С-типов.

Из теоремы 1' и выпуклости областей предтипов вытекают такие следствия:

Следствие 1. Области С-типов суть конечногранные выпуклые бесконечные пирамиды с вершиной O , полностью лежащие в конусе K .

Следствие 2. Разбиение конуса K на области С-типов внутри конуса K локально конечно.

Следствие 3. Для того чтобы форма f была внутренней формой области некоторого С-типа Δ , необходимо и достаточно, чтобы ее предтип по каждому индексу I_σ , $\sigma = 1, 2, \dots, 2^n - 1$, определялся однозначно.

К более детальному исследованию соотношений между С-типами и типами Вороного мы вернемся в одной из последующих публикаций.

3°. Квадратичную форму $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ранга r назовем простой, если она целочисленным унимодулярным преобразованием приводится к виду $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$.

Ограниченный конечногранный многогранник $Q \subset K$ назовем простым, если всем его вершинам соответствуют простые квадратичные формы.

Определение 3. Бесконечную пирамиду над простым многогранником и с вершиной в точке O будем называть простым.

Определение 4. Множество $\Omega \subset K \setminus \dot{K}$ будем называть С-конечным (смежно-конечным), если существует такая константа $\omega = \omega(\Omega)$, что для любой формы $f \in \Omega$ и для любого индекса I_σ выполнено соотношение $l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_n^2 < \omega$, где $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ — предтип, которому принадлежит форма f по индексу I_σ .

Теорема 2. Для того чтобы множество $\Omega \subset K \setminus \dot{K}$ было С-конечным, необходимо и достаточно, чтобы оно могло быть вложенным в простую пирамиду (константа ω может быть вычислена по этой пирамиде).

Исторически первым примером С-конечной области является, в силу теоремы Сандаковой (7), область приведения Минковского (15, 16, 13). При-

мером S -конечного множества является любая S -область ⁽¹⁵⁾, а также (замечание Б. Н. Делоне) любое множество, лежащее в объединении конечного числа областей, эквивалентных области Минковского. Более того, оказывается, что любая S -конечная область обязана лежать в таком конечном объединении областей Минковского. Эти два последние замечания дают один из путей доказательства теоремы 2. Наиболее интересный факт на этом пути дается леммой 1.

Л е м м а 1. *Каждая простая пирамида лежит в объединении конечного числа областей, эквивалентных области приведения Минковского.*

4°. Предлагаемый нами алгоритм отыскания S -типов состоит в следующем.

1) Зафиксируем произвольную S -конечную область приведения $\mathcal{P}$, которой соответствует конечный алгоритм приведения. Такой областью может быть, например, или область Минковского, или область Венкова ^(14, 13), или, что будет удобнее всего практически, состоящая из нескольких простых пирамид области первого приведения, приведения по современным формам, Вороного ⁽¹⁷⁾.

2) Разобьем выбранную область $\mathcal{P}$ на области предтипов, это действие может быть произведено в конечное число шагов.

3) Разобьем область $\mathcal{P}$ на области S -типов, это разбиение есть пересечение конечного числа разбиений, найденных выше.

4) Определим, пользуясь выбранным алгоритмом приведения, какие из полученных S -типов эквивалентны между собой, и оставим только попарно неэквивалентные. Заметим, что в случае фундаментальности выбранной области $\mathcal{P}$ «лишними» могут оказаться только те области S -типа, которые пересекаются с границей области $\mathcal{P}$.

5°. Перейдем к примерам. При любом $n \geq 2$ существует ⁽¹⁷⁾ совершенная область R , для которой справедливо

Предложение. *Область R есть область S -типа, для которого $l_{i\sigma} = \varepsilon_{i\sigma}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $\sigma = 1, 2, \dots, 2^n - 1$.*

Действительно, область R есть область типа Вороного ⁽²⁾, поэтому она содержится в области S -типа. С другой стороны, на каждой точке любой из граней области R предтип по какому-нибудь из индексов определен неоднозначно. Например, на каждой точке грани, противолежащей ребру $\lambda(x_1 - x_2)^2$, предтип по индексу $I = (1, 1, 0, \dots, 0)$ может быть равным либо $(1, -1, 0, \dots, 0)$, либо I .

Заметим, что, в силу теоремы Диксона ⁽¹⁸⁾, область R единственная совершенная область, совпадающая с областью типа.

При $n = 2, 3$ область приведения совпадает с областью R , следовательно, в этих размерностях существует только по одному S -типу.

6°. При $n = 4$ существуют две совершенных области R и R_1 ; относительно области R_1 справедливо следующее

Предложение. *Область R_1 по каждому из индексов $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$ разбивается на 4 предтипа, эти разбиения эквивалентны между собой относительно группы области R_1 . По каждому из оставшихся индексов область R_1 принадлежит только одному предтипу. Пересекаясь, все эти области предтипа дают 64 области S -типа, из которых существенно различны только две.*

Итак, при $n = 4$ существует только три S -типа.

7°. При $n = 5$ совершенных областей уже три: R, R_1, R_2 ; относительно области R_2 здесь справедливо следующее неожиданное

Предложение. *Каждая область S -типа, пересекающаяся с областью R_2 , пересекается и с областью, эквивалентной области R_1 .*

Это предложение дает возможность при перечислении пятимерных S -типов учитывать только те, области которых пересекаются с областью R_1 , и, разумеется, первый тип. Относительно области R_1 при $n = 5$ справедливо

Предложение. *Область R_1 по каждому из десяти индексов $(1, 1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 0, 1)$,*

$(1, 1, 0, 1, 1)$, $(0, 0, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 0, 1, 1)$, $(0, 0, 1, 1, 1)$ разбивается на 6 предтипов, эти 10 разбиений эквивалентны между собой относительно группы области R_1 . По каждому из остальных индексов область R_1 принадлежит лишь одному предтипу.

Из получившихся 610 систем неравенств удается выбрать все совместные попарно неэквивалентные системы, а после отбрасывания части областей С-типа, пересекающихся с границей области R_1 , удается выделить все попарно неэквивалентные области С-типа.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
24 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. С. Федоров, Начала учения о фигурах, Петербург, 1885. Изд. АН СССР, 1953. ² Г. Ф. Вороной, Собр. соч., 2, Киев, 1952, стр. 239. ³ Б. Н. Делоне, Изв. АН СССР, ОФМН, № 1, 79 (1929). ⁴ Б. Н. Делоне, Изв. АН СССР, ОФМН, № 2, 147 (1929). ⁵ Б. Н. Делоне, Изв. АН СССР, ОМОН, № 6, 793 (1934). ⁶ Б. Н. Делоне, УМН, № 3, 16 (1937); № 4, 102 (1938). ⁷ Б. Н. Делоне, Н. Н. Садакова, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 64, 28 (1961). ⁸ Б. Н. Делоне, С. С. Рышков, ДАН, 162, № 2, 277 (1965). ⁹ E. S. Barnes, T. J. Dickson, J. Austral. Math. Soc., 7, № 1, 115 (1967). ¹⁰ Б. Н. Делоне, Н. Н. Долбилин и др., Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 2, 289 (1970). ¹¹ С. С. Рышков, ДАН, 162, № 2, 277 (1965). ¹² D. W. Trennery, The Covering of Space by Spheres, Doctor. Thesis, Univ. of Adelaide, 1972. ¹³ С. С. Рышков, ДАН, 198, № 5, 1028 (1971). ¹⁴ Б. А. Венков, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 1, 37 (1940). ¹⁵ Б. Н. Делоне, С. С. Рышков, М. И. Штогрин, Матем. заметки, 1, № 3, 253 (1967). ¹⁶ H. Minkowski, Ges. Abh., Leipzig — Berlin, 1911, S. 53. ¹⁷ Г. Ф. Вороной, Собр. соч., 2, Киев, 1952, стр. 171. ¹⁸ T. Y. Dickson, J. Number Theory, 4, № 4, 330 (1972).