

А. С. СОЛОДОВНИКОВ

ПСЕВДОРИМАНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА С ПОЛЮСАМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 27 XII 1972)

Пусть V — псевдориманово пространство размерности n . Условимся называть точку $q \in V$ полюсом, если V допускает свободное вращение вокруг q , т.е. стационарная подгруппа точки q имеет размерность $n(n-1)/2$.

В данной работе изучаются полные аналитические псевдоримановы пространства V индекса $*$ 1, содержащие один или большее число полюсов; при этом дается фактическое построение некоторого класса пространств V со многими полюсами. Мы рассматриваем в основном случай $n=2$, хотя результаты распространяются на случай любой размерности $**$ n .

1°. Одна лемма локального характера. Пусть V — двумерное аналитическое псевдориманово пространство, q — его полюс, U — малая окрестность точки q . Изотропные геодезические, проходящие через q , разбивают U на четыре угла. Для геодезических, проходящих через q в одной паре углов, имеем $ds^2 < 0$ (минус-углы), для геодезических в другой паре углов $ds^2 > 0$ (плюс-углы).

Внутри каждого из минус-углов можно ввести «полярные» координаты ρ, φ , где ρ есть «расстояние» до q (по геодезической), а φ — гиперболический угол в точке q , отсчитываемый от фиксированного направления. Так как q — полюс, то будем иметь внутри каждого минус-угла

$$ds^2 = -d\rho^2 + f(\rho) d\varphi^2. \quad (1)$$

Аналогичным образом внутри плюс-углов будет

$$ds^2 = d\rho^2 + \tilde{f}(\rho) d\varphi^2, \quad (2)$$

где ρ есть расстояние до q , а φ — гиперболический угол.

Лемма. При малых значениях $|\rho|$ справедливы формулы

$$f(\rho) = \rho^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{2n} \rho^{2n}, \quad (3)$$

$$\tilde{f}(\rho) = -\rho^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_{2n} \rho^{2n}. \quad (4)$$

Тем самым переход от (1) к (2) сводится к замене ρ на $i\rho$.

2°. Плюс-функция и минус-функция полюса. Пусть V — такое, как указано в п. 1° и, сверх того, полное и односвязное. Тогда, как известно, V гомеоморфно плоскости.

Теорема. Пусть q — полюс пространства V . Тогда функции $f(\rho)$ и $\tilde{f}(\rho)$ допускают однозначные аналитические продолжения $F(\rho)$ и $\tilde{F}(\rho)$

* Под индексом мы понимаем число «отрицательных квадратов» в каноническом представлении формы ds^2 в каждой точке.

** При $n=4$ указанная в работе конструкция может представить некоторый интерес с точки зрения общей теории относительности. На этих вопросах мы не останавливаемся.

на всю ось ρ . При этом $F(\rho) \geq 0$, $\bar{F}(\rho) \leq 0$. Если c есть нуль какой-либо из функций $F(\rho)$ или $\bar{F}(\rho)$, то эта функция четна относительно $\rho = c$, причем ее разложение в ряд в окрестности c начинается с члена $\alpha(\rho - c)^2$, $\alpha \neq 0$.

Условимся называть $F(\rho)$ минус-функцией, а $\bar{F}(\rho)$ — плюс-функцией полюса q .

Из перечисленных свойств плюс- и минус-функций следует, что если какая-либо из них имеет нуль, отличный от $\rho = 0$, то она является четно-периодической функцией.

Мы исследуем два случая.

Случай 1. Функции $F(\rho)$ и $\bar{F}(\rho)$ имеют каждая только по одному нулю (т.е. $F(\rho) > 0$ и $\bar{F}(\rho) < 0$ при $\rho \neq 0$). В этом случае пространство V

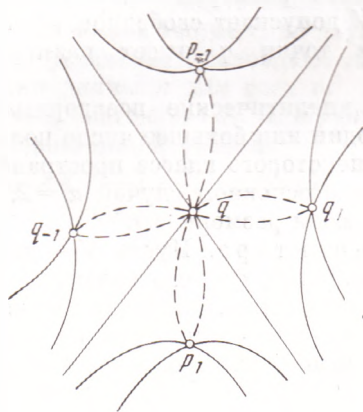


Рис. 1

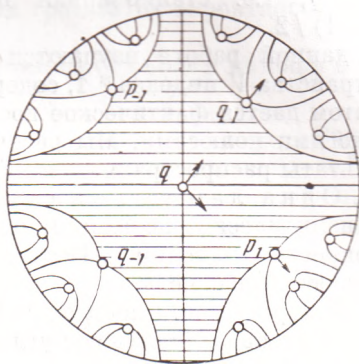


Рис. 2

устроено следующим образом. Рассмотрим псевдоевклидову плоскость E с метрикой $-dy_1^2 + dy_2^2$. В области $-y_1^2 + y_2^2 < 0$ введем полярные координаты ρ, φ ($y_1 = \rho \operatorname{ch} \varphi$, $y_2 = \rho \operatorname{sh} \varphi$), в области $-y_1^2 + y_2^2 > 0$ — полярные координаты τ, φ ($y_1 = \tau \operatorname{sh} \varphi$, $y_2 = \tau \operatorname{ch} \varphi$). Оказывается, пространство V может быть получено из плоскости E путем следующей перестройки метрики последней:

в области $-y_1^2 + y_2^2 < 0$: $-d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \rightarrow -d\rho^2 + F(\rho) d\varphi^2$,

в области $-y_1^2 + y_2^2 > 0$: $d\tau^2 - \tau^2 d\varphi^2 \rightarrow d\tau^2 + \bar{F}(\tau) d\varphi^2$.

Аналогичным образом описывается строение пространства V , если $\dim V > 2$.

Случай 2. Каждая из функций $F(\rho)$ и $\bar{F}(\rho)$ имеет вид «симметричной волны». Под этим мы подразумеваем, что указанные функции периодичны, причем

$$F(\rho) = F(a - \rho), \quad \bar{F}(\rho) = \bar{F}(b - \rho),$$

где a и b — периоды функций $F(\rho)$ и $\bar{F}(\rho)$ соответственно.

В этом случае полюс q имеет четыре «соседних» полюса: q_{-1} , q_1 и p_{-1} , p_1 (см. рис. 1); в полюсах q_{-1} , q_1 фокусируются отрезки длины ia минус-геодезических, выходящих из q , а в p_{-1} , p_1 — отрезки длины b в плюс-геодезических, выходящих из q (на рис. 1 сплошные линии изображают изотропные геодезические, а пунктирные — отрезки неизотропных). При этом окрестности всех пяти полюсов изометричны.

Каждый из полюсов q_{-1} , q_1 , p_{-1} , p_1 имеет еще три соседних, каждый из этих — еще трех соседей и т. д. Качественная картина расположения всех

полюсов и соответствующих изотропных геодезических приведена на рис. 2, где пространство изображено в виде внутренности круга*. Окрестности всех полюсов изометричны.

Обозначим через Γ дискретную группу, порожденную изометриями $q \rightarrow q_1$ и $q \rightarrow p_1$ (на рис. 2 показаны переходящие одна в другую при этих изометриях). Фактор-пространство V/Γ можно представлять в виде заштрихованного «восьмиугольника» на рис. 2, в котором следует отождествить вершины q_{-1}, q_1, p_{-1}, p_1 , а также каждые две стороны, согласованно выходящие на «абсолют»; при этом восьмиугольник представляет V/Γ дважды.

Легко видеть, что указанные отождествления дают (топологически) сферу с четырьмя выколотыми точками. Мы приходим, следовательно, к такому заключению: если в пространстве V существует полюс, которому отвечают функции $F(\rho)$ и $\tilde{F}(\rho)$, являющиеся «симметричными волнами», то существует пространство V' , гомеоморфное сфере без четырех точек и локально изометричное V .

3°. Фактическое построение пространств со многими полюсами. Следующая конструкция позволяет получить целый класс пространств, исследованных в п. 2° (случай 2). Мы исходим из пары функций $F(\rho)$, $\tilde{F}(\rho)$, обладающих свойствами:

- 1) $F(\rho)$ и $\tilde{F}(\rho)$ аналитичны на всей оси ρ ; $F(0) = \tilde{F}(0) = 0$;
- 2) $F(\rho)$ имеет некоторый период a , причем $F(\rho) = F(a - \rho)$; $\tilde{F}(\rho)$ имеет период b и $\tilde{F}(\rho) = \tilde{F}(b - \rho)$;
- 3) внутри отрезка $[0, a]$ производная $F'(\rho)$ обращается в нуль только при $\rho = a/2$, причем $F''(a/2) \neq 0$; аналогичное условие для функции $\tilde{F}(\rho)$ (см. рис. 3);
- 4) $\max F(\rho) = -\min \tilde{F}(\rho)$;
- 5) в окрестности точки $\rho = 0$ справедливы равенства (1) и (2), где $f(\rho)$ следует заменить на $F(\rho)$, а $\tilde{f}(\rho)$ на $\tilde{F}(\rho)$.

Без ограничения общности можно еще считать, что $\max F(\rho) = 1$ и $F''(0) = 2$.

Рассмотрим двумерную сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, а также функцию

$$\lambda = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}},$$

определенную на всей сфере, за исключением четырех точек $(\pm 1, \pm 1, 0)$. Условие $xy > 0$ выделяет на сфере две связных области; условие $xy < 0$ дает еще две области. В каждой из четырех областей введем новые координаты ρ , φ и новую метрику ds^2 следующим образом: для областей $xy > 0$

$$F(\rho) = \lambda, \quad e^{2\varphi} = y/x; \quad ds^2 = -d\rho^2 + F(\rho)d\varphi^2, \quad (5)$$

причем ρ возрастает от 0 до a , когда z возрастает от -1 до 1; для областей $xy < 0$

$$\tilde{F}(\rho) = \lambda, \quad e^{2\varphi} = -x/y; \quad ds^2 = d\rho^2 + \tilde{F}(\rho)d\varphi^2, \quad (6)$$

причем ρ возрастает от 0 до b , когда z возрастает от -1 до 1.

Теорема. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, из которой исключены 4 точки $(\pm 1, \pm 1, 0)$, можно определить аналитическую псевдориманову метрику с двумя полюсами $p = (0, 0, 1)$ и $q = (0, 0, -1)$, для которой введенные выше координаты ρ и φ являются полярными координатами (с центром q), а метрика в этих координатах принимает вид (5), (6).

* На рисунке показан полюс q , четыре соседних с ним полюса, а также соседние с этими четырьмя; дальнейшие полюса уже не указаны ввиду уменьшения размеров рисунка с приближением к границе круга.

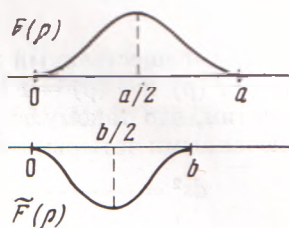


Рис. 3

Описанный выше класс пространств не является пустым, так как пары функций $F(\rho)$, $\bar{F}(\rho)$ с перечисленными в начале п. 3⁰ свойствами действительно существуют. Можно, например, взять двоякопериодическую функцию комплексного переменного $\operatorname{ch} z$ (эллиптический косинус z), отвечающую «модулю» $k = 1/\sqrt{2}$, и положить

$$F(z) = \operatorname{ch}^2(z\sqrt{2} + a/2),$$

где $2a$ — вещественный период функции $\operatorname{ch} z$ (мнимый период будет $2ai$). Тогда $F(\rho)$ и $\bar{F}(\rho) = F(i\rho)$, где ρ вещественное, — искомая пара функций. Заметим, что такому выбору $F(\rho)$ и $\bar{F}(\rho)$ будет отвечать на сфере (с исключенными четырьмя точками) метрика

$$ds^2 = -\frac{1+z^2}{4z^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}} \left[2dx dy + xy \left(\frac{dx^2}{1-x^2} + \frac{dy^2}{1-y^2} \right) \right]$$

(нерегулярность при $z=0$ — устранимая); при этом векторное поле, отвечающее однопараметрической группе вращений вокруг полюсов ρ и $\bar{\rho}$ имеет координаты

$$\dot{x} = \frac{-x}{1+(1-y^2)/(1-x^2)}, \quad \dot{y} = \frac{y}{1+(1-x^2)/(1-y^2)}.$$

4⁰. Обобщение конструкции пункта 3⁰ на n -мерный случай. Если в условиях п. 3⁰ положим $x_1 = (x+y)/\sqrt{2}$, $x_2 = (x-y)/\sqrt{2}$, то уравнение сферы останется $x_1^2 + x_2^2 + z^2 = 1$, а функция λ запишется как

$$\lambda = \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{(x_1^2 - x_2^2)^2 + 4z^2}}.$$

Такой вид λ подсказывает следующий путь для построения n -мерного псевдориманова пространства с двумя полюсами.

Исходим по-прежнему из пары функций $F(\rho)$, $\bar{F}(\rho)$ со свойствами, перечисленными в начале п. 3⁰. Далее, на сфере $S^{(n)}$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + z^2 = 1$$

задаем функцию

$$\lambda = \frac{-x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{\sqrt{(-x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^2 + 4z^2}},$$

определенную на всем пространстве $S^{(n)}$, за исключением двух сфер $S^{(n-2)}$: $z=0$, $-x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$ (или, что эквивалентно, $z=0$ и $x_1^2 = 1/2$). В области (связной), определенной на сфере $S^{(n)}$ неравенством $-x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$, введем координату ρ и новую метрику ds^2 посредством формул

$$F(\rho) = \lambda, \quad ds^2 = -d\rho^2 + F(\rho) d\sigma^2(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}), \quad (7)$$

где $d\sigma^2$ — положительно определенная метрика постоянной кривизны -1 ; в каждой из двух областей $-x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 0$ определим ρ и ds^2 посредством

$$F(\rho) = \lambda, \quad ds^2 = d\rho^2 + F(\rho) d\theta^2(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}), \quad (8)$$

где $d\theta^2$ — псевдориманова метрика индекса $n-1$, также имеющая постоянную кривизну -1 . Можно показать, что на сфере $S^{(n)}$, из которой исключены две указанные выше сферы $S^{(n-2)}$, существует аналитическая псевдориманова метрика с двумя полюсами $(0, \dots, 0, 1)$ и $(0, \dots, 0, -1)$, которая в полярных координатах имеет вид (7), (8). Индекс этой метрики равен 1.