

В. В. АНИСИМОВ

ОБ ОСТАНОВКЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В МОМЕНТ ДОСТИЖЕНИЯ НЕКОТОРОГО УРОВНЯ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 5 III 1973)

В ряде задач, связанных с изучением предельного поведения сумм случайных величин на полумарковском процессе, некоторых аддитивных функционалов от случайных блужданий, возникают суперпозиции процессов такого вида, когда один процесс останавливается в момент достижения другим некоторого уровня. В данной работе указывается явный вид преобразования Лапласа характеристической функции такой суперпозиции для процессов с независимыми приращениями и марковских процессов.

Рассмотрим процесс $\bar{z}(t) = \{\xi(t), y(t)\}$, $t \geq 0$. Скажем, что $\bar{z}(t)$ удовлетворяет условию А, если $\bar{z}(t) \in (-\infty, \infty)^r \times [0, \infty]$, $t \geq 0$, и $\bar{z}(t)$ — стохастически непрерывный процесс, непрерывен справа и с вероятностью единица не имеет разрывов 2-го рода, причем $y(t)$ монотонно не убывает и $y(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Положим

$$\mu(t) = \inf\{s: s \geq 0, y(s) \geq t\}, \quad t \geq 0.$$

Нас будут интересовать распределения величин $\xi^-(t) = \xi(\mu(t)-)$ и $\xi^+(t) = \xi(\mu(t))$ (под $f(t-)$ понимается $\lim_{x \rightarrow t-0} f(x)$).

Обозначим

$$\psi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, s) = \int_0^\infty e^{-st} M \exp\{i[(\bar{\lambda}_1, \xi^-(t)) + (\bar{\lambda}_2, \xi^+(t))]\} dt, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

где $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ — произвольные векторы из $(-\infty, \infty)^r$ а $(\cdot, \cdot)$ — символ скалярного произведения. Имеет место

Л е м м а. Если $\bar{z}(t)$ удовлетворяет условию А, то

$$\begin{aligned} \psi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \sum_{k=0}^\infty M \exp \left\{ i \left[\left(\bar{\lambda}_1, \bar{\xi} \left(\frac{k}{n} \right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\bar{\lambda}_2, \bar{\xi} \left(\frac{k+1}{n} \right) \right) \right] \right\} \cdot \left(\exp \left\{ -s y \left(\frac{k}{n} \right) \right\} - \exp \left\{ -s y \left(\frac{k+1}{n} \right) \right\} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $n \geq 1$ положим

$$\{\xi_n^-(t), \xi_n^+(t)\} = \begin{cases} \left\{ \bar{\xi} \left(\frac{k}{n} \right), \bar{\xi} \left(\frac{k+1}{n} \right) \right\}, & \text{если } \frac{k}{n} < \mu(t) \leq \frac{k+1}{n}. \\ k=0, 1, \dots \end{cases}$$

Тогда очевидно, что с вероятностью единица при $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_n^-(t), \xi_n^+(t)\} \rightarrow \{\xi^-(t), \xi^+(t)\}, \quad (2)$$

причем из монотонности $y(t)$ следует, что процессы $\xi^-(t), \xi^+(t)$ не имеют разрывов 2-го рода. Обозначим через $\varphi_n(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, t)$ и $\varphi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, t)$ соответ-

венно характеристические функции совместных распределений векторов $\{\xi_n^-(t), \xi_n^+(t)\}$ и $\{\bar{\xi}^-(t), \bar{\xi}^+(t)\}$. Из (2) следует, что $\varphi_n(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, t) \rightarrow \varphi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, t)$ и $\varphi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, t)$ по t не имеет разрывов 2-го рода, откуда нетрудно получить, что

$$\psi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi_n(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, t) dt.$$

Но по формуле полной вероятности

$$\varphi_n(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, t) = \sum_{k=0}^{\infty} M \exp \left\{ i \left[\left(\bar{\lambda}_1, \bar{\xi} \left(\frac{k}{n} \right) \right) + \left(\bar{\lambda}_2, \bar{\xi} \left(\frac{k+1}{n} \right) \right) \right] \right\} \chi \left[y \left(\frac{k}{n} \right) < t \leq y \left(\frac{k+1}{n} \right) \right],$$

откуда после несложных преобразований следует (1).

Из леммы для конкретных классов процессов нетрудно получить следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $\bar{z}(t)$ — процесс с независимыми приращениями, удовлетворяющий условию А. Обозначим

$$f(\bar{\lambda}, s, t) = M \exp \{ i(\bar{\lambda}, \bar{\xi}(t)) - sy(t) \}, \quad t \geq 0, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Тогда

$$\psi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, s) = -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} \frac{f(\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2, s, x) f(\bar{\lambda}_2, 0, x)}{f(\bar{\lambda}_2, s, x)} dx \frac{f(\bar{\lambda}_2, s, x)}{f(\bar{\lambda}_2, 0, x)}.$$

В частности, если $\bar{z}(t)$ — однородный процесс и $\bar{z}(0) = \{\bar{0}, 0\}$, т. е. $f(\bar{\lambda}, s, t) = \exp \{ a(\bar{\lambda}, s) t \}$, где $a(\bar{\lambda}, s)$ — кумулянта процесса $\bar{z}(t)$, то

$$\psi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, s) = \frac{1}{s} \frac{a(\bar{\lambda}_2, s) - a(\bar{\lambda}_2, 0)}{a(\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2, s)}.$$

Следствие. Пусть $\bar{z}(t)$ — однородный процесс с независимыми приращениями, удовлетворяющий условию А и $\bar{z}(0) = \{\bar{0}, 0\}$. Обозначим

$$\tau_i^- = t - y(\mu(t)), \quad \tau_i^+ = y(\mu(t)) - t, \quad \bar{\eta}_i = \bar{\xi}^+(t) - \bar{\xi}^-(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-st} M \exp \{ i(\bar{\lambda}, \bar{\eta}_t) - u_1 \tau_1^- - u_2 \tau_1^+ - u_3 \mu(t) \} dt = \\ & = \frac{a(\bar{\lambda}, s + u_1) - a(\bar{\lambda}, u_2)}{(s + u_1 - u_2)(a(\bar{0}, s) - u_3)}, \quad \operatorname{Re} u_k > 0, \quad k = 1, \dots, 3. \end{aligned}$$

Эти результаты согласуются с (1, 2).

Пусть теперь $\bar{z}(t)$ — марковский процесс. Положим

$$\begin{aligned} F(a, b, \bar{\lambda}, s, t, u) &= M [e^{i(\bar{\lambda}, \bar{\xi}(u)) - sy(u)} / \bar{z}(t) = \{\bar{a}, b\}], \\ \bar{a} &\in (-\infty, \infty)^r, \quad b \in [0, \infty), \quad 0 \leq t \leq u, \quad \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned}$$

Теорема 2. Если $\bar{z}(t)$ — марковский процесс, удовлетворяющий условию А, то

$$\psi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, s) = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} M e^{i(\bar{\lambda}_1, \bar{\xi}(x))} [e^{-sy(x)} F(\bar{\xi}(x), y(x), x, x+dx, \bar{\lambda}_2, 0) -$$

$$-F(\bar{\xi}(x), y(x), x, x+dx, \bar{\lambda}_2, s)],$$

где понимается

$$\int_0^{\infty} M\varphi(\bar{\xi}(x), x, x+dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} M\varphi\left(\bar{\xi}\left(\frac{k}{n}\right), \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right).$$

В частности, если

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} (F(a, b, \bar{\lambda}, s, t, t+h) - e^{i(\bar{\lambda}, a) - sb}) = f(\bar{a}, b, \bar{\lambda}, s, t)$$

равномерно по $\{\bar{a}, b, t\}$ из любой ограниченной области в $(-\infty, \infty)^r \times [0, \infty) \times [0, \infty)$, то

$$\begin{aligned} \psi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, s) = & -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} M e^{i(\bar{\lambda}_1, \bar{\xi}(x))} [e^{-sy(x)} f(\bar{\xi}(x), y(x), \bar{\lambda}_2, 0, x) - \\ & - f(\bar{\xi}(x), y(x), \bar{\lambda}_2, s, x)] dx. \end{aligned}$$

Как следствие отсюда также можно получить совместное распределение недоскока, перескока и $\mu(t)$.

Рассмотрим теперь случай, когда остановка происходит в момент достижения некоторого случайного уровня. Пусть $\bar{z}(t) = \{\bar{\xi}(t), y(t)\}$ и $n(t)$, $t \geq 0$, — случайные процессы такие, что процесс $\{\bar{\xi}(t), y(t) - n(t)\}$ удовлетворяет условию А и $y(0) - n(0) = a < 0$. Положим $\mu = \inf\{s: s \geq 0, y(s) \geq n(s)\}$. Нас будут интересовать распределения величин $\xi^{\pm} = \xi(\mu \pm)$. В этом случае вместо процесса $y(t)$ в теоремах 1 и 2 достаточно рассмотреть процесс $a + y(t) - n(t)$ и, если обозначить через $\varphi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, x)$ обращение преобразования Лапласа $\psi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, s)$ по s , т. е.

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \varphi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, x) dx = \psi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, s),$$

то соответственно в предположениях теорем 1 или 2 относительно процесса $\{\bar{\xi}(t), a + y(t) - n(t)\}$ получим, что

$$M \exp\{i[(\bar{\lambda}_1, \xi^-) + (\bar{\lambda}_2, \xi^+)]\} = \varphi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, a-).$$

Если нас будут интересовать распределения недоскока и перескока через процесс $n(t)$, то в качестве $\bar{\xi}(t)$ достаточно взять процесс $y(t) - n(t)$.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
20 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Д. В. Гусак, Теория вероятн. и ее примен., 14, № 1, 15 (1969). ² Е. А. Перчерский, Б. А. Рогозин, Там же, 14, № 3, 431 (1969).