Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 6

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

М. И. КЛЮЧАНЦЕВ

ОЦЕНКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 21 XII 1972)

Под фундаментальным решением (точнее, функцией Грина) в полупространстве $y > 0$ для задач с однородными порядка $2m$ и m_j операторами $L(D_x, B_y)$, $H_j(D_x, B_y)$ с постоянными коэффициентами понимается здесь функция $K_{j,q}(x, y)$, удовлетворяющая условиям

$$\Delta_x^{(n+q)/2} K_{j,q}(x, y) = K_j(x, y), \tag{1}$$

$$L(D_x, B_y) K_j = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to 0} H_i(D_x, B_y) K_j = \delta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, q — произвольное положительное число, имеющее ту же четность, что и n, Δ_x — лапласиан $\sum D_x^2$. Через D_x и B_y мы обозначаем следующие дифференциальные операции:

$$D_x = D_{x_\nu} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \ \nu = 1, \ldots, n, \quad B_y = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

где параметр k есть некоторое число из промежутка $(-1, \infty)$. Всюду далее числа ν, p и μ определяются по параметру k по формулам

$$k = 2\nu - 1, \ \nu = p - \mu, \ p = 0, 1, \ldots, \quad -1/2 \leqslant \mu < 1/2.$$

Отметим также, что равенства (1) — (3) понимаются в смысле обобщенных функций.

Из всех ограничений на операторы $L(D, B)$ и $H_j(D, B)$, которые необходимы при постановке задач типа (2), (3), здесь нам понадобится только условие на L: τ-корни (их ровно m) многочлена $L(\xi, \tau)$ при $|\xi| = 1$ (ξ — действительный вектор) лежат в плоскости, разрезанной либо а) вдоль положительной части действительной оси, либо б) вдоль отрицательной части действительной оси и, более того, внутри круга фиксированного радиуса R_0^2.

Будем даже предполагать, что все корни удалены от разреза и точки $\tau = 0$ на расстояние, большее δ_0^2.

Для удобства, когда это не будет приводить к недоразумениям, мы будем обозначать через s длину мультииндекса $(s_1, \ldots, s_l)$ с целочисленными компонентами. Из структуры $K_{j,q}$ (см. ниже) следует оценка

$$|D^s K_{j,q}| \leqslant C(|x|^2 + y^2)^{(m_j+q-s)/2}(1 + |\ln|P|| + \ln^2|P|), \tag{4}$$

$$s \leqslant m_j + q - p, \quad |P| = (|x|^2 + y^2)^{1/2}, \ D^s = D_x^{s_1} D_y^{s_2}.$$

Последний результат справедлив для любой функции $K_{j,q}(x, y)$ вне зависимости от а) или б) условия на L. Однако оценка (4) не вполне удовлетворительна в силу ограничения $s \leqslant m_j + q - p$.

Если же вместо обычного дифференцирования D^s ввести операцию $D^s B_y^z$ (ради упрощения) и рассматривать функции $K_{j,q}$ в зависимости от оператора L и значений параметра k, то ограничение $s \leqslant m_j + q - p$ можно ослабить, а это значит получить новые оценки.

Сначала рассмотрим случай а) условия на L.

Если k — четное число, то для $K_{j,q}$ имеет место представление

$$K_{j,q}(x, y) =$$

$$= a_j y^k \left(\frac{\partial}{y\,\partial y}\right)^p \frac{1}{y} \int\limits_{|\xi|=1} d\omega_\xi \int\limits_\gamma \frac{N_j(\xi, \tau)(x\xi + \sqrt{\tau} y)^{m_j+q}}{L(\xi, \tau)} \left(\ln \frac{x\xi + \sqrt{\tau} y}{i} + C_q\right) d\tau. \quad (5)$$

Если же k не является целым числом, то

$$K_{j,q}(x, y) =$$

$$= \int\limits_{|\xi|=1} d\omega_\xi \int\limits_\gamma \frac{N_j}{L} d\tau \left[a_j (\sqrt{\tau} y)^{2\nu} \int\limits_0^\pi (x\xi + \sqrt{\tau}\, y \cos\varphi)^{m_j+q-2\nu} \sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi + \right. \quad (6)$$

$$\left. + b_j y^{2\nu} \left(\frac{\partial}{y\,\partial y}\right)^p y^{2\mu} \int\limits_0^\pi (x\xi + \sqrt{\tau}\, y \cos\varphi)^{m_j+q} \left(\ln \frac{x\xi + \sqrt{\tau}\, y \cos\varphi}{i} \sin^{2\mu}\varphi + C_q\right) d\varphi \right].$$

В формулах (5), (6) a_j, b_j, C_q обозначают вполне определенные постоянные; γ — жорданов контур, лежащий в соответствующей разрезанной плоскости и охватывающий все корни знаменателя, $\sqrt{\tau}$ — первая ветвь квадратного корня, определенная в этой же плоскости; через $d\omega_\xi$ обозначен элемент поверхности единичной сферы $|\xi| = 1$.

Положим $\varphi(x, y) \in C_B^\infty$, если она при $y \geqslant 0$ выдерживает применение $D_x^s B_y^r$ для любых s и r.

Лемма 1. *Функции* (5) *и* (6) *принадлежат классу* C_B^∞ *при* $y \geqslant 0$ *всюду, кроме начала координат, и удовлетворяют неравенству*

$$|D_x^s B_y^r K_{j,q}| \leqslant C(|x|^2 + y^2)^{(m_j+q-s-2r)/2}(1 + |\ln|P||). \quad (7)$$

Более того, если $s + 2r \geqslant m_j + q + 1$, *то для* (5) *функция* $D^s B^r K_{j,q}$ *однородна степени* $m_j + q - s - 2r$ *и логарифмический член в* (7) *можно опустить.*

В случае нечетного k имеем

$$K_{j,q}(x, y) =$$

$$= \int\limits_{|\xi|=1} d\omega_\xi \int\limits_\gamma \frac{N_j}{L} d\tau\, a_j y^{2p} \left(\frac{\partial}{y\,\partial y}\right)^p \int\limits_0^\pi (x\xi + \sqrt{\tau}\, y \cos\varphi)^{m_j+q} \left\{\frac{1}{2} \ln^2 \frac{x\xi + \sqrt{\tau}\, y \cos\varphi}{i} + \right.$$

$$\left. + [\ln(2\sqrt{\tau}\, y \sin^2\varphi) - C'_{m_j,q}] \ln \frac{x\xi + \sqrt{\tau}\, y\cos\varphi}{i} + C''_{m_j,q}\right\} d\varphi, \quad (8)$$

где a_j, $C'_{m_j,q}$ и $C''_{m_j,q}$ постоянные.

Лемма 2. *Функция* (8) *принадлежит классу* C_B^∞ *всюду, кроме начала координат, и удовлетворяет неравенству*

$$|D_x^s B_y^r K_{j,q}| \leqslant C|P|^{m_j+q-s-2r}(1 + |\ln|P|| + \ln^2|P|). \quad (9)$$

Доказательства этих лемм являются модификациями доказательства леммы 2.1 работы ([1]).

Леммы 1 и 2 показывают, что оценки функции $K_{j,q}$ имеют тот же характер, что и соответствующие оценки обычных (не сингулярных) эллиптических уравнений. Заметим, что при $k = 0$ задача (2), (3) превращается в регулярную эллиптическую задачу в смысле А. Агмона, А. Дуглиса и Л. Ниренберга ([1]).

Пусть теперь оператор $L(D, B)$ удовлетворяет случаю б) условия на L. Если k — четное число (мы ограничимся только этим случаем), то

$$K_{j,q} = a_j y^k \left(\frac{\partial}{y\,\partial y}\right)^p \frac{1}{y} \int\limits_{|\xi|=1} d\omega_\xi \int\limits_{\gamma} \frac{N_j(\xi, \tau)}{L(\xi, \tau)} (x\xi + \sqrt{\tau} y)^{m_j+q} \left(\ln\frac{x\xi + \sqrt{\tau}\, y}{i} + C_q\right) d\tau, \tag{10}$$

где под ln понимаем главную ветвь логарифма в комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрицательной части действительной оси; γ — жорданов контур — состоит здесь из окружности радиуса M с центром в точке $(-x\xi / y)^2$ и двух берегов разреза от $(-x\xi / y)^2$ до $(-x\xi / y)^2 - M$.

В том случае, когда хотя бы один корень знаменателя попадает на разрез, функция $K_{j,q}(x, y)$ равна конечной части интеграла, стоящего в правой части равенства (10).

Будем предполагать, что при любом ξ, где $|\xi| = 1$, есть хотя бы один действительный корень многочлена $L(\xi, \tau)$ (в противном случае все сводится к оценке (7)).

Оценки функции (10) и всех ее производных зависят теперь как от значений, которые принимают действительные корни многочлена $L(\xi, \tau)$, так и от области изменения x и y. Так, например, если δ_0^2 и R_0^2 обозначают границы открытого промежутка изменения действительных корней многочлена $L(\xi, \tau)$ (в нашем случае всегда найдутся числа δ_0 и R_0), то в области $|x| / y < \delta_0$ функции $K_{j,q}$ принадлежат классу C_B^∞ и при $s + 2r > m_j + q - p$ удовлетворяют неравенству

$$| D_x^s B_y^r K_{j,q} | \leqslant C_1 \sum_{\substack{i<p \\ m_j+q-s-2r-i \geqslant 0}} y^i | P |^{m_j+q-s-2r-i} | \ln | P | | +$$

$$+ C_2(\delta_0, R_0) \sum_{\substack{i<p \\ m_j+q-s-2r-i<0}} y^i (\delta_0 y - |x|)^{m_j+q-s-2r-i}. \tag{11}$$

При $s + 2r > m_j + q$ функция $D^s B^r K_{j,q}$ однородна степени $m_j + q - s - 2r$ и логарифмический член в оценке (11) нужно опустить.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
19 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг, Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., 1962.