

УДК 538.3

ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕЗАМКНУТЫХ ЭКРАНАХ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 29 XI 1972)

Рассмотрим дифракцию первичной волны E^0, H^0 на незамкнутом бесконечно тонком, идеально проводящем экране s с гладким контуром $\mathcal{L}$. Поле E^0, H^0 возбуждает на экране s поверхностный ток K , создающий вторичное поле E, H . Последнее должно удовлетворять однородным уравнениям Максвелла вне $\bar{s} = s + \mathcal{L}$, граничному условию

$$E_t = -E_t^0 \quad \text{на } s, \quad (1)$$

условиям Майкснера на контуре $\mathcal{L}$ и условиям излучения на бесконечности. Эта задача имеет единственное решение. Построим его. Нам понадобится лемма Лоренца, которую удобно записать в виде

$$\int_s K E \{K_n, s_0\} ds = \int_{s_0} K_n E \{K, s\} ds; \quad (2)$$

здесь K и K_n — плотности поверхностных токов, распределенных на s и s_0 соответственно, а, например, $E \{K, s\}$ — электрический вектор поля, возбуждаемого током K , распределенным на s . Под s_0 будем понимать поверхность, получающуюся в результате дополнения s до замкнутой при помощи геометрической поверхности Σ ($s_0 = s + \Sigma$).

Полагая, что в равенстве (2) K есть искомый ток, а K_n — один из семейства вспомогательных токов (которое мы определим ниже), перепишем (2), учитывая (1), так:

$$\int_s K E \{K_n, s\} ds = - \int_s K_n E^0 ds + \int_\Sigma K_n E \{K, s\} ds. \quad (3)$$

Используя обозначения

$$I = \begin{cases} K & \text{на } s, \\ \frac{1}{\rho_0} E_t \{K, s\} & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad F_n = \begin{cases} E_t \{K_n, s_0\} & \text{на } s, \\ -\rho_0 K_n & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad (4)$$

где ρ_0 — волновое сопротивление свободного пространства, придадим равенству (3) следующий вид:

$$\int_{s_0} I F_n ds = - \int_s K_n E^0 ds. \quad (5)$$

Это соотношение является основным в разбиваемом методе.

Для нахождения при помощи (5) вектора I введем гильбертово пространство $L_R^2(s_0)$, элементами которого являются вектор функции, заданные на s_0 и касательные к ней. Скалярное произведение и норму определим формулами

$$(A, I) = \int_{s_0} A \overline{RI} ds, \quad \|I\| = \left(\int_{s_0} I \overline{RI} ds \right)^{1/2}; \quad (6)$$

здесь R — линейный оператор, выбираемый так, чтобы выполнялись аксиомы гильбертова пространства и все элементы $L_R^2(s_0)$ удовлетворяли условиям Майкснера для тока при приближении к $\mathcal{L}$ со стороны s и электрического поля, при приближении со стороны Σ ; черта — знак комплексного сопряжения.

Практически в качестве R удобно брать двумерный тензор второго ранга, имеющий (в ортогональной системе координат) диагональный вид с положительными на s и Σ компонентами. Если одна из координатных линий $X_1 = \text{const}$ совпадает с $\mathcal{L}$, то R_{11} должно стремиться к бесконечности как $\rho^{-1/2}$ (ρ — расстояние до $\mathcal{L}$), а R_{22} к нулю как $\rho^{1/2}$ при приближении к $\mathcal{L}$ со стороны s ; при приближении со стороны Σ R_{11} должно стремиться к нулю как $\rho^{1/2}$, а R_{22} оставаться конечным (см. ниже).

Обозначения (6) позволяют записать равенство (5) так:

$$(I, R^{-1}\bar{F}_n) = a_n, \quad a_n \equiv - \int_s K_n E^0 ds; \quad (7)$$

R^{-1} — оператор, обратный оператору R ($RR^{-1} = 1$), а a_n — известные числа.

Выберем в качестве K_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, семейство дважды непрерывно дифференцируемых* на s_0 векторных функций, полное относительно $L(s_0)$ ($L(s_0)$ — пространство суммируемых на s_0 векторных функций, тангенциальных к s_0 ; $L_R^2(s_0) \subset L(s_0)$). Такое семейство всегда существует. Легко видеть, что I и $R^{-1}\bar{F}_n$ включены в $L_R^2(s_0)$.

Введем еще подпространство $M(s_0)$, элементами которого являются вектор-функции $A \in L_R^2(s_0)$, удовлетворяющие следующим дополнительным требованиям:

- 1) A имеют непрерывные вторые производные на s ;
- 2) нормальная к $\mathcal{L}$ компонента A стремится к нулю, при приближении к $\mathcal{L}$ со стороны s , не слабее чем $\rho^{1/2}$.

$M(s_0)$ всюду плотно в $L_R^2(s_0)$, поэтому его замыкание $\bar{M}(s_0)$ совпадает с $L_R^2(s_0)$. Покажем сначала, что семейство $R^{-1}\bar{F}_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, полно относительно $M(s_0)$, т. е. из условий

$$(A, R^{-1}\bar{F}_n) \equiv \int_{s_0} A F_n ds = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где $A \in M(s_0)$, следует, что $A = 0$ на s_0 .

Перепишем равенство (8), учитывая (4):

$$\int_s A E \{K_n, s_0\} ds - \rho_0 \int_{\Sigma} K_n A ds = 0,$$

или, используя лемму типа (2),

$$\int_{s_0} K_n E \{A, s\} ds - \rho_0 \int_{\Sigma} K_n A ds = 0.$$

Представляя первый интеграл в виде суммы интегралов по s и Σ и объединяя соответствующие члены, запишем последнее равенство так:

$$\int_{s_0} K_n F ds = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где

$$F = \begin{cases} E_t \{A, s\} & \text{на } s, \\ E_t \{A, s\} - \rho_0 A & \text{на } \Sigma. \end{cases} \quad (10)$$

* Это требование можно ослабить.

Поскольку $F \in L(s_0)$, а семейство K_n полно в $L(s_0)$, то из условий (9) следует, что $F = 0$ (почти всюду) на s_0 . Отсюда, учитывая (10),

$$E_i\{A, s\} = 0 \quad \text{на } s, \quad \rho_0 A = E_i\{A, s\} \quad \text{на } \Sigma. \quad (11)$$

Поле $E\{A, s\}$, $H\{A, s\}$ вследствие первого условия (11) и теоремы единственности обращается в нуль во всем пространстве. Так как ток A равен скачку $E_i\{A, s\}$ при переходе через s , то $A = 0$ на s ; из второго условия (11) следует также, что $A = 0$ на Σ . Таким образом, $A = 0$ на s_0 и полнота в $M(s_0)$ доказана. Поскольку $\bar{M}(s_0) = L_R^2(s_0)$, то вследствие непрерывности скалярного произведения $R^{-1}\bar{F}_n$ полно также относительно $L_R^2(s_0)$.

Дальнейший путь решения аналогичен используемому в методе Энского (1).

Прежде всего ортонормируя семейство $R^{-1}\bar{F}_n$, приходим к функциям

$$u_m = \sum_{n=0}^m a_n^{(m)} R^{-1}\bar{F}_n, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где числа $a_n^{(m)}$ находятся из условий $(u_m, u_n) = \delta_{mn}$ по известным формулам. Далее, умножая первое равенство (7) на $\overline{a_n^{(m)}}$ и суммируя результат по n от нуля до m , найдем

$$(I, u_m) = c_m, \quad c_m = \sum_{n=0}^m a_n \overline{a_n^{(m)}}. \quad (13)$$

Таким образом, c_m — коэффициент Фурье вектор-функции I , и, следовательно,

$$I(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(q), \quad q \in s_0. \quad (14)$$

Этот ряд сходится по норме $L_R^2(s_0)$ и определяет ток K на s и E_i на Σ (см. (5)). Искомое вторичное поле определяется во всем пространстве рядом

$$E = E\{K, s\} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n U_n(q); \quad (15)$$

здесь

$$U_n(q) = \frac{1}{i4\pi\omega\epsilon} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_s u_n(p) \frac{e^{-ik|p-q|}}{|p-q|} ds.$$

Выражения для H мы не выписываем. Как и в (2), можно показать, что ряд (15) сходится равномерно в любой области, не пересекающейся с $\bar{s}$. Для улучшения сходимости ряда (14) (а значит, и (15)) желательно, чтобы каждый его член имел такие же особенности на $\mathcal{L}$, как и I . Это обеспечивается указанным выше выбором оператора R .

Если вычисление $E\{K_n, s_0\}$, входящей во все расчетные формулы (см. (4)), не легче, чем $E\{K_n, s\}$, то метод следует упростить. Для этого нужно положить $K_n = 0$ на Σ . При этом $E\{K_n, s_0\} = E\{K_n, s\}$, интегралы по Σ исчезают и всюду следует заменить s_0 на s , I — на K и F_n — на $E_i\{K_n, s\}$. Функции $u_n(q)$, $q \in s$, получаются теперь в результате ортогонализации семейства $R^{-1}E_i\{K_n, s\}$ на s , полнота которого в $L_R^2(s)$ есть простое следствие полноты $R^{-1}\bar{F}_n$ в $L_R^2(s_0)$. Таким образом, отпадает необходимость введения Σ (ср. с (2)).

Отметим еще, что основное равенство (5) может быть непосредственно использовано для сведения задачи к решению системы линейных уравнений, минуя ортогонализацию. Для этого достаточно подставить в (5) выражение для I в виде ряда

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} b_m A_m, \quad A_m \in L_R^2(s_0),$$

где A_m — полное в $L_R^2(s_0)$ семейство функций.

Тогда для нахождения постоянных b_m будем иметь систему

$$\sum_{m=0}^{\infty} Z_{nm} b_m = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad Z_{nm} \equiv \int_{s_0} F_n A_m ds.$$

Числа Z_{nm} и a_n (см. (7)) известны.

Если выбор A_m произведен так, что последняя система хорошо обусловлена, то определение b_m на ЭВМ не представляет большого труда.

Поступило
14 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, ИЛ, 1960. ² Я. Н. Фельд, ДАН, 206, № 6 (1972).