Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 1

УДК 517.946 **МАТЕМАТИКА**

Э. А. ЯРВ

О ЗОЛОТАРЕВСКИХ КРИТИЧЕСКИХ ИНТЕРВАЛАХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 25 XII 1972)

Линейный функционал F_n в пространстве алгебраических полиномов $\{P_n(x)\}$ степени не выше n с равномерной метрикой будем задавать в форме $F_n = \mu_0, \ldots, \mu_n$, положив $F_n(x^k) = \mu_k$, $k = 0, \ldots, n$.

Согласно ([1]), стр. 24, заданный в такой форме функционал будем называть отрезком-функционалом и иногда отрезком, а числа μ_k, $k = 0, \ldots, n$,— его параметрами.

Полином $Q_n(x)$, $\|Q_n\| = 1$, будем называть экстремальным или обслуживающим функционал F_n, если $F_n(Q_n) = +N_n$, где N_n — норма F_n, а точки $0 \leqslant \sigma_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, s$, в которых $|Q_n(\sigma_i)| = 1$, его узлами.

Согласно ([1]), стр. 74, паспортом полинома $Q_n(x)$, $\|Q_n\| = 1$, назовем тройку чисел (n, s, p), где n — степень $Q_n(x)$, s — число его узлов, p — число повторений на $[0, 1]$, где повторением называем факт, когда двум соседним узлам σ_i соответствуют одинаковые знаки отклонений.

Из ([1]), стр. 26 и стр. 38, следует, что если отрезок-функционал $(\mu_k)_0^n$ имеет экстремальный полином $Q_n(x)$ степени $n \geqslant 1$, то $\mu_k = \sum\limits_{i=1}^{s} \delta_i \sigma_i^k$, $k = 0, \ldots, n$, где $(\sigma_i)_1^s$ узлы полинома $Q_n(x)$. Такую структуру называем узловой, а числа $(\delta_i)_1^s$ — нагрузками узлов полинома $Q_n(x)$. Среди чисел $(\delta_i)_1^s$ могут оказаться и нули. Те из узлов σ_i, у которых $\delta_i \neq 0$, называем нагруженными.

Согласно ([1]), стр. 74, паспортом отрезка $(\mu_i)_0^n$ называем тройку чисел $[n, s, p]$, где n — степень его экстремального полинома, s — число нагруженных узлов этого полинома, p — число повторений на $[0, 1]$.

Согласно ([1]), стр. 47, каков бы ни был отрезок-функционал $(\mu_i)_0^{n-1} = 0_0, \ldots, 0_{n-1}$, существуют два таких числа $\mu_n' < \mu_n''$, что отрезок $(\mu_i)_0^n = \mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n$;

а) при $\mu_n \geqslant \mu_n'$ обслуживается полиномом Чебышева $T_n(x) = \cos n \arccos (2x - 1)$ и не обслуживается им ни при каком значении $\mu_n < \mu_n''$;

б) при $\mu_n \leqslant \mu_n'$ обслуживается полиномом Чебышева $-T_n(x)$ и не обслуживается им ни при каком значении $\mu_n > \mu_n'$.

Интервал (μ_n', μ_n'') называется чебышевским критическим интервалом отрезка, имеющего базис $(\mu_i)_0^{n-1}$, для n-го параметра. Обозначим через $\{Q_n(x, \theta)\}$ множество экстремальных полиномов, определенных отрезком-функционалом $0_0, \ldots, 0_{n-2}, 1_{n-1}, \theta$ при $^1/_2(n-1) < \theta < {}^1/_2(n+1)$.

Согласно ([2]), стр. 24, при $\theta = n/2$ это полиномы паспорта $[n, n, 0]$, совпадающие с полиномами Е. И. Золотарева ([3]), приведенными к промежутку $[0, 1]$ и max модулю, равному единице.

Согласно ([4]), будем говорить, что отрезок-функционал $(\mu_i)_0^n = \mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \theta$ обладает золотаревской устойчивостью, если для любого $\bar\theta$, лежащего в чебышевском критическом интервале $(\mu_n' < \bar\theta < \mu_n'')$, отрезок $(\mu_i)_0^n$ принадлежит паспорту $[n, n, 0]$ и обслуживается некоторым полиномом $Q_n(x, \theta)$ или $-Q_n(x, \theta)$, причем, когда θ изменяется от μ_n' до μ_n'', то множество обслуживающих полиномов совпадает либо с множеством $\{Q_n(x, \theta)\}$, либо с $\{-Q_n(x, \theta)\}$.

Из ([4]) известно, что, каков бы ни был отрезок-функционал $(\mu_i)_0^{n-2}$, имеются два таких числа $A'_{n-1} < A''_{n-1}$, что отрезок вида $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \overline{\theta}$ золотаревски устойчив при $\mu_{n-1} > A''_{n-1}$ и при $\mu_{n-1} < A'_{n-1}$. В первом случае его обслуживают $\{Q_n(x, \theta)\}$, во втором — $\{-Q_n(x, \theta)\}$. Интервал $[A'_{n-1}, A''_{n-1}]$ называется золотаревским критическим интервалом отрезка, имеющего базис $(\mu_i)_0^{n-2}$, для $(n-1)$-го параметра.

В ([4]) установлено, что золотаревский критический интервал для $(n-1)$-го параметра любого базиса $(\mu_i)_0^{n-2}$ охватывает чебышевский критический интервал того же параметра, т.е.

$$A'_{n-1} \leqslant \mu'_{n-1} < \mu''_{n-1} \leqslant A''_{n-1}.$$

В ([5]) доказано, что если через $(\Delta''_{i,n})_0^n$ обозначить нагрузки при разложении отрезка $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n''$ по узлам $(\tau_{i,n})_0^n$ полинома Чебышева $T_n(x)$, то

$$L_n = \mu''_n - \mu'_n = \widetilde{\Delta}^{(n)} n/2^{2n-1}, \tag{1}$$

где

$$\widetilde{\Delta}^{(n)} = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \varepsilon_i \,|\, \Delta''_{i,n}|; \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & 0 < i < n, \\ 2, & i = 0;\ i = n. \end{cases}$$

Теорема 1. *Если в отрезке-функционале* $(\mu_i)_0^{n-1}$ *параметр* μ_{n-1} *находится вне золотаревского критического интервала для* $(n-1)$*-го параметра, то при разложении отрезка* $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n''$ *по узлам* $(\tau_{i,n})_0^n$ *полинома Чебышева* $T_n(x)$:

а) *при* $\mu_{n-1} > A''_{n-1}$ $\Delta''_{0,n} = 0$ *и* $\widetilde{\Delta}^{(n)} = 2\,|\,\Delta''_{n,n}|$;

б) *при* $\mu_{n-1} < A'_{n-1}$ $\Delta''_{n,n} = 0$ *и* $\widetilde{\Delta}^{(n)} = 2\,|\,\Delta''_{0,n}|$.

Доказательство теоремы построено на использовании: а) характера зависимости $\{Q_n(x, \theta)\}$ от θ, изученного в ([1]), стр. 88—95; б) теоремы о непрерывной деформации ([1]), стр. 70; в) соотношения между $(\Delta''_{i,n})_0^n$ и $(\Delta'_{i,n})_0^n$ полученного в ([5]), где через $(\Delta'_{i,n})_0^n$ обозначены нагрузки при разложении отрезка $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n'$ по узлам $(\tau_{i,n})_0^n$ полинома Чебышева $T_n(x)$

Теорема 2. *Каков бы ни был базис* $(\mu_i)_0^{n-1}$, *существуют два числа* $h' < h''$, *обладающие следующими свойствами: при разложении отрезка-функционала* $\mu_0, \ldots, \mu_{n-2}, \mu_{n-1} + h, \mu_n''(h)$ *по узлам* $(\tau_{i,n})_0^n$ *полинома Чебышева* $T_n(x)$:

1) *условие* $\Delta''_{0,n}(h) = 0$ *и* $\widetilde{\Delta}^{(n)}(h) = 2(\Delta''_{n,n}(h))$ *выполняется при* $h \geqslant h''$ *и не выполняется при* $h < h''$;

2) *условие* $\Delta''_{n,n}(h) = 0$ *и* $\widetilde{\Delta}^{(n)}(h) = 2\,|\,\Delta''_{0,n}(h)\,|$ *выполняется при* $h \leqslant h'$ *и не выполняется при* $h > h'$.

Доказательство. Сделаем два предварительных замечания.

1) При разложении по узлам $(\tau_{i,n})_0^n$ полинома Чебышева $T_n(x)$ отрезка $(\gamma_i)_0^n = 0_0, \ldots, 0_{n-2}, h_{n-1}, \gamma_n''(h)$ имеют место выражения для нагрузок:

$$\delta''_{i,n} = \begin{cases} (-1)^{n-i} \tau_{i,n} \cdot h \dfrac{2^{2n-1}}{\varepsilon_i \cdot n} & \text{при } h \geqslant 0, \\[2ex] (-1)^{n-i} (1 - \tau_{i,n}) \cdot h \cdot \dfrac{2^{2n-1}}{\varepsilon_i \cdot n} & \text{при } h < 0. \end{cases} \tag{2}$$

2) Если $(\Delta''^{(1)}_{i,n})_0^n$ и $(\Delta''^{(2)}_{i,n})_0^n$ есть нагрузки при разложении по узлам $(\tau_{i,n})_0^n$ полинома $T_n(x)$ отрезков $(\mu_i)_0^n = \mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n''$ и $(\gamma_i)_0^n = \gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}, \gamma_n''$, то нагрузки при разложении по узлам $(\tau_{i,n})_0^n$ полинома $T_n(x)$ отрезка $(\psi_i)_0^n = \mu_0 + \gamma_0, \ldots, \mu_{n-1} + \gamma_{n-1}, \psi_n''$ вычисляются как

$$\Delta''_{i,n} = \Delta''^{(1)}_{i,n} + \Delta''^{(2)}_{i,n} - (-1)^{n-i} \Delta^{(n)}/\varepsilon_i, \quad i = 0, \ldots, n, \tag{3}$$

где

$$\underset{\sim}{\Delta}^{(n)} = \min_{0\leqslant i\leqslant n} \varepsilon_i \,|\, \Delta'''^{(1)}_{i,\,n} + \Delta'''^{(2)}_{i,\,n} \,|.$$

Перейдем к доказательству теоремы.

Возьмем два отрезка

$$(\mu_i)_0^n = \mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \ \mu_n'' \text{ и } (\gamma_i)_0^n = 0_0, \ldots, 0_{n-2}, \ h_{n-1}, \ \gamma_n''(h).$$

Тогда нагрузки при разложении по узлам $(\tau_{i,\,n})_0{}^n$ полинома $T_n(x)$ отрезка $\mu_0, \ldots, \mu_{n-2}, \mu_{n-1} + h, \mu_n''(h)$ определяются из (2) и (3).

Для того чтобы $\Delta''_{0,n}(h) = 0$, необходимо и достаточно выполнения системы неравенств

$$2\,|\,\Delta''_{0,\,n}(h)\,| \leqslant \varepsilon_i \,|\, \Delta''_{i,\,n}(h)\,|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Обозначив через h_1'' минимальное число, удовлетворяющее этой системе, получим

$$h_1'' = \frac{n}{2^{2n-1}} \max_{0<i\leqslant n} \frac{2\,|\,\Delta''_{0,\,n}\,| - \varepsilon_i \,|\, \Delta''_{i,\,n}\,|}{\tau_{i,\,n}}.$$

Для того чтобы $\tilde{\Delta}^{(n)} = 2|\Delta''_{n,n}(h)\,|$, необходимо и достаточно выполнения системы неравенств

$$2\,|\,\Delta''_{n,\,n}(h)\,| \geqslant \varepsilon_i \,|\, \Delta''_{i,\,n}(h)\,|, \quad i = 0, \ldots, (n-1).$$

Обозначив через h_2'' минимальное число, удовлетворяющее этой системе, получим

$$h_2'' = \frac{n}{2^{2n-1}} \max_{0\leqslant i<n} \frac{\varepsilon_i \,|\, \Delta''_{i,\,n}\,| - 2\,|\, \Delta''_{n,\,n}\,|}{1 - \tau_{i,\,n}}.$$

Тогда

$$h'' = \max\{h_2'', h_1''\}.$$

Существование и единственность числа h' доказывается аналогично.

Следствие. *Для границ золотаревского критического интервала для $(n-1)$-го параметра отрезка $(\mu_i)_0^{n-1}$ имеют место оценки*

$$A''_{n-1} \geqslant \max\{\mu''_{n-1}, (\mu_{n-1} + h'')\}, \quad A'_{n-1} \leqslant \min\{\mu'_{n-1}, (\mu_{n-1} + h')\}. \tag{4}$$

Теорема 3. *Отрезок $(\mu_i)_0{}^n = \mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \theta$ золотаревски устойчив, если при разложении по узлам $(\tau_{i,\,n})_0{}^n$ полинома $T_n(x)$ отрезка $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n''$:*

а) *при $\mu_{n-1} > \mu''_{n-1}$ имеет место $\Delta''_{0,\,n} = 0$ и $\tilde{\Delta}^{(n)} = 2\,|\,\Delta''_{n,\,n}|$,*

б) *при $\mu_{n-1} < \mu'_{n-1}$ имеет место $\Delta''_{n,\,n} = 0$ и $\tilde{\Delta}^{(n)} = 2\,|\,\Delta''_{0,\,n}|$.*

Используя теорему об единственности наилучшего продолжения не абсолютно монотонного отрезка ([1]), стр. 38, докажем, что в условиях теоремы при любом $\mu_n' < \theta < \mu_n''$ отрезок-функционал $(\mu_i)_0{}^n$ имеет ровно n нагруженных узлов. Далее, воспользуемся следствием теоремы о непрерывной деформации ([1]) стр. 78.

Следствие. *Для границ золотаревского критического интервала для $(n-1)$-го параметра отрезка $(\mu_i)_0^{n-1}$ имеют место формулы*

$$A''_{n-1} = \max\{\mu''_{n-1}, (\mu_{n-1} + h'')\}, \quad A'_{n-1} = \min\{\mu'_{n-1}, (\mu_{n-1} + h')\}. \tag{5}$$

Теорема 4. *Если $L_n(h)$ — длина чебышевского критического интервала для n-го параметра отрезка-функционала $\mu_0, \ldots, \mu_{n-2}, \mu_{n-1}+h, \mu_n''(h)$, а $(\Delta''_{i,n})_0{}^n$ — нагрузки при разложении по узлам $(\tau_{i,\,n})_0{}^n$ полинома $T_n(x)$ отрезка $(\mu_i)_0{}^n = \mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n''$, то при $\mu_{n-1} + h > A''_{n-1}$ и при $\mu_{n-1} + h <$*

$< A_{n-1}$ *имеет место*

$$L_n(h) = |h + (|\Delta''_{n,n}| - |\Delta''_{0,n}|)n/2^{2n-2}|. \tag{6}$$

Доказательство теоремы 4 построено на использовании теоремы 1 и формул (1) — (3).

Следствие. *Внутри или на границе золотаревского критического интервала для $(n-1)$-го параметра существует, по крайней мере, одна точка $\mu_{n-1} + h^0$, при которой длина чебышевского критического интервала для n-го параметра минимальна.*

Теорема 5. *Внутри или на границе золотаревского критического интервала для $(n-1)$-го параметра существует единственная точка $\mu_{n-1}+h^0$, при которой длина чебышевского критического интервала для n-го параметра минимальна.*

Доказательство. Докажем, что $L_n(h)$ обладает следующими свойствами:

1) если $L_n(h)$ *возрастает* в точке $h = h_0$, то $L_n(h)$ возрастает при $h > h_0$;

2) если $L_n(h)$ убывает в точке $h = h_0$, то $L_n(h)$ убывает при $h < h_0$.

Обозначим через p и m индексы ближайших к концам промежутка $[0, 1]$ узлов $(\tau_{i,n})_0{}^n$, в которых выполнены условия

$$\Delta''_{p,n}(h) = 0, \quad \tilde{\Delta}^{(n)}(h) = \varepsilon_m |\Delta''_{m,n}(h)|.$$

Разобьем $[A'_{n-1}, A''_{n-1}]$ точками $\xi_1, \ldots, \xi_l$ на промежутки, в каждом из которых индексы p и m не меняются.

Применив к i-му промежутку $(\xi_{i-1} \leqslant \mu_{n-1} + h < \xi_i)$ формулу (3), получим

$$L'_n(h) = \tau_{m,n} - \tau_{p,n}. \tag{7}$$

Отсюда: а) необходимым и достаточным условием возрастания (убывания) $L_n(h)$ на $[\xi_{i-1}, \xi_i)$ является $m < p$ (соответственно $m > p$).

Тогда, использовав то, что с увеличением h индекс p может разве лишь уменьшиться, а индекс m разве лишь увеличиться и с уменьшением h, наоборот, индекс p может разве лишь увеличиться, а индекс m разве лишь уменьшиться, получим свойства $L_n(h)$ 1) и 2).

Из доказанных свойств $L_n(h)$ следует, что, если точка h^0 существует, то она единственная. Существование же точки $h = h^0$ утверждается в следствии теоремы 4.

Следствие. *Необходимым и достаточным условием того, что $h = h^0$, является следующее: неравенство $m \leqslant p$ (см. обозначения теоремы 5) при переходе через точку $h = h^0$ меняет знак на противоположный.*

Ленинградский электротехнический институт связи
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило
19 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. В. Вороновская, Метод функционалов и его приложения, Л., 1963. [2] Е. В. Вороновская, Экстремальные полиномы конечных функционалов. Автореф. докторской диссертации, ЛГУ, 1955. [3] Е. И. Золотарев, Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях наименее и наиболее уклоняющихся от нуля (1887). Собр. соч., в. 2, 1932. [4] Е. В. Вороновская, ДАН, 173, № 1, 15 (1967). [5] Е. В. Вороновская, Э. А. Ярв, ДАН, 197, № 1, 21 (1971).