Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 5

УДК 532.582.33 *ГИДРОМЕХАНИКА*

О. В. ВОИНОВ, А. Г. ПЕТРОВ

О ПЕРЕМЕЩЕНИИ ДЕФОРМИРУЮЩИХСЯ ТЕЛ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ СОСТОЯНИЯ ПОКОЯ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 25 VII 1973)

В работах ([1], [2]) показана возможность перемещения тела в идеальной жидкости в отсутствие вихрей за счет внутренних усилий. Ниже получены необходимые и достаточные условия такого перемещения.

В идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности, движется тело изменяющейся формы. Массовые силы отсутствуют. Если движение жидкости непрерывно и имеет однозначный потенциал, то оно однозначно связано с движением поверхности тела, форма и положение которой задается некоторым набором обобщенных координат. Для описания движения тела в жидкости кроме параметров, задающих поверхность, необходимо ввести параметры, определяющие положение центра масс тела относительно его поверхности. При этом движение масс внутри тела считается произвольным.

Для простоты рассмотрим пространственный или плоский случай при наличии оси симметрии. Пусть контур образующей поверхности тела определяется при помощи конформного отображения внешности контура в плоскости z на внешность единичного круга в плоскости ζ:

$$z=\omega(t,\zeta)=a_0(t)\zeta+x(t)+\frac{a_1(t)}{\zeta}+\ldots+\frac{a_n(t)}{\zeta^n}; \tag{1}$$

здесь $x(t)$ — поступательная координата поверхности, переменные $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — параметры формы и объема (пространственный случай) или площади (плоский случай). В плоском случае условие постоянства площади, необходимое для конечности кинетической энергии, определяет связь параметров $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Кинетическая энергия жидкости T зависит от обобщенных координат $q_1, \ldots, q_n, x$, задающих форму поверхности тела и перемещение. В плоском случае $q_i=a_i$, а в осесимметричном случае в число координат $\mathbf{q}$ войдет a_0.

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}(\mathbf{q})\dot q_i\dot q_j+\sum_{i=1}^{n}m_i(\mathbf{q})\dot q_i\dot x+\frac{1}{2}m(\mathbf{q})\dot x^2; \tag{2}$$

здесь $\mathbf{q}$ — вектор с компонентами $q_1, \ldots, q_n$.

В плоском случае коэффициенты присоединенных масс в (2) могут быть выражены аналитически через коэффициенты ряда Лорана (1).

Путем перераспределения масс внутри тела за счет внутренних сил в принципе можно задавать произвольное положение центра тяжести при фиксированных координатах поверхности тела. Если x_0 — координата центра тяжести тела, то дополнительным параметром будет $l=x_0-x$.

На основании уравнений Лагранжа для жидкости, учитывая изменение количества движения тела, можно записать

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot x}=F, \qquad \frac{d}{dt}M\dot x_0=-F; \tag{3}$$

здесь F — сила воздействия тела на жидкость, M — масса тела.

Если в начальный момент времени тело покоилось, то полный импульс равен нулю во все время движения:

$$\partial T/\partial \dot{x}+M\dot{x}_0=0.$$

Отсюда, с учетом (2), следует выражение

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{M}{M+m}\dot{l}-\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{M+m}\dot{q}_i, \tag{4}$$

которое определяет $x(t)$, если известны функции $l(t)$ и $\mathbf{q}(t)$. Пусть эти функции таковы, что $l(t_1)=l(t_2)$, $\mathbf{q}(t_1)=\mathbf{q}(t_2)$, т. е. форма поверхности и центр масс тела в моменты t_1 и t_2 совпадают, тогда смещение поверхности за время t_2-t_1 равно

$$\Delta x=-\oint\left(\frac{M}{M+m}dl+\sum_{i=1}\frac{m_i}{M+m}dq_i\right).$$

Необходимое и достаточное условие, при котором перемещение тела невозможно, состоит в том, что подынтегральное выражение есть полный дифференциал

$$\frac{\partial m}{\partial q_i}=0,\qquad \frac{\partial m_i}{\partial q_j}=\frac{\partial m_j}{\partial q_i},\qquad i,j=1,2,\ldots,n. \tag{5}$$

В предельном случае пренебрежимо малой массы тела $M=0$ необходимое и достаточное условие имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{m_i}{m}=\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{m_j}{m}. \tag{6}$$

Рассмотрим конкретные примеры движения тел в жидкости за счет внутренних усилий.

Пример 1. Пусть течение жидкости плоскопараллельное, форма тела задается по формуле (1) двумя параметрами a_1, a_2, а масса тела $M=0$. Условие постоянства площади дает

$$a_0^2=1+a_1^2+2a_2^2.$$

Присоединенные массы в (2) при малой деформации $a_1\ll1$, $a_2\ll1$, равны

$$m\approx\pi(1-2a_1),\qquad m_1\approx-3\pi a_2,\qquad m_2\approx-\pi a_1.$$

Условие (6), очевидно, не выполняется. Нетрудно подобрать периодические функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$ так, что за период их изменения полное смещение тела не равно нулю.

Пример 2. Шар переменного радиуса $a_0(t)$ и массой $M>0$. Относительное положение l центра масс шара изменяется со временем. Так как присоединенная масса шара в жидкости $m={}^2/_3\pi a_0^3$, то условие постоянства присоединенной массы m не выполнено и, следовательно, «самодвижение» такого шара в жидкости возможно. Уравнение движения центра шара

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{M}{M+{}^2/_3\pi a_0^3}\dot{l}.$$

Легко подобрать такие периодические функции $l(t)$ и $a_0(t)$, чтобы смещение за период было отлично от нуля. Таким образом, первоначально покоящийся в жидкости шар может переместиться на любое расстояние только за счет внутренних сил и периодического изменения радиуса.

Следует отметить, что пример 2 не нов, он указан в работе [1].

Известно ([3]), что только за счет периодических деформаций тела в безвихревом потоке невозможно получить силу тяги. В согласии с этим из (3) следует, что в среднем за период $F=0$.

Авторы благодарят акад. Л. И. Седова за обсуждение результатов работы.

Поступило
16 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. G. Saffman, J. Fluid Mech., 28, Part 2 (1967). [2] М. А. Лаврентьев, Журн. прикл. мех. и технич. физ., № 2 (1973). [3] Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, «Наука», 1966.