

В. В. ГИМОН

О ЗАВИСИМОСТИ ПРАВИЛ ВЫВОДА ВТОРОГО ЭТАЖА СТУПЕНЧАТОЙ СЕМАНТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МАРКОВА

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 19 II 1973)

Мы предполагаем известными введенные А. А. Марковым языки $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$ ($\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ в (1)), в частности, определение верной (истинной) формулы в каждом из этих языков. Замкнутую формулу A из $\mathcal{Y}_1$ называем ложной, если верна импликация $\supset A (\neq)$. Напоминаем, что система S_2 содержит следующие правила вывода:

- 1) $\frac{A \supset AB}{B}$; 2) $\frac{\supset AB \supset BC}{\supset AC}$; 3) $\frac{B}{\supset AB}$; 4) $\frac{\supset AB \supset AC}{\supset A \& BC}$;
- 5) $\frac{\supset AC \supset BC}{\supset \vee ABC}$; 6) $\frac{\mathcal{L} \mathcal{M}}{\& \mathcal{L} \mathcal{M}}$; 7) $\frac{\& \mathcal{L} \mathcal{M}}{\mathcal{L}}$; 8) $\frac{\& \mathcal{L} \mathcal{M}}{\mathcal{M}}$;
- 9) $\frac{\supset F_P^X(D) B \text{ для всех } P}{\supset \exists X D B}$

где A, B, C — замкнутые формулы $\mathcal{Y}_1$, D — формула $\mathcal{Y}_1$ в переменной X , P — формальное слово, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — замкнутые формулы $\mathcal{Y}_2$ (в дальнейшем, если нет специальной оговорки, все формулы считаются замкнутыми).

Формула $\mathcal{M}$ называется выводимой в S_2 из формулы $\mathcal{L}$ (пишем $\mathcal{L} \vdash \mathcal{M}$), если она совпадает с $\mathcal{L}$, или верна в семантике $\mathcal{Y}_2$, или получается по правилу вывода из формул, выводимых из $\mathcal{L}$.

А. А. Марков установил, что система S_2 не является независимой и эквивалентна своей подсистеме S_2' , получающейся отбрасыванием правила 9). Целью настоящей заметки является доказательство того, что сохранение правила 9) в системе позволяет опустить правила 4) и 5) и что никакие дальнейшие упрощения уже невозможны.

Мы обозначаем символом S_2'' результат исключения правил 4) и 5) из S_2 , а символом S_2^0 — результат замены в системе S_2' правил 4) и 5) следующими:

$$4^0) \frac{\supset AB}{\supset A \& AB} \quad 5^0) \frac{\supset AB}{\supset \vee ABB}.$$

Как известно, формуле A из $\mathcal{Y}_1$ можно сопоставить формулу $[A^X$ (также из $\mathcal{Y}_1$) в переменной X такую, что верны импликации $\supset A \exists X [A^X$ и $\supset \exists X [A^X A$ и распознаваема истинность каждой формулы $F_P^X([A^X)$. Мы предполагаем фиксированными переменную X и способ построения $[A^X$ по A . Введем систему S_2^* , состоящую из правил 1), 3), 6), 7), 8) системы S_2 и правила

$$9^*) \frac{\supset F_P^X([A^X) B \text{ для всех } P}{\supset AB}$$

Сохраняя определение выводимости в S_2 для всех рассматриваемых систем (с изменением лишь набора правил), мы говорим кроме того, что $\mathcal{M}$ выводима из $\mathcal{L}$ с высотой h (h — натуральное число), если $\mathcal{M}$

совпадает с $\mathcal{L}$, или верна, или получается по одному из правил вывода, все посылки которого выводимы из $\mathcal{L}$ с высотой $h-1$.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — формулы $\mathcal{A}_2$. Следующие утверждения эквивалентны:

- $\mathcal{L} \vdash \mathcal{M}$ в S_2 ;
- $\mathcal{L} \vdash \mathcal{M}$ в S_2^0 ;
- существует число h такое, что $\mathcal{L} \vdash \mathcal{M}$ в S_2^* с высотой h ;
- существует число h такое, что $\mathcal{L} \vdash \mathcal{M}$ в S_2'' с высотой h .

Доказательство включает следующие этапы.

а) $\rightarrow$ б). Индукция по выводу в S_2' , что допустимо вследствие устранимости правила 9). При этом четвертое правило заменяется по схеме

$$\frac{\frac{\supset AC}{\supset A \& AC} \quad \frac{\frac{\frac{\supset \& ACA \supset AB}{\supset \& ACB}}{\supset \& AC \& \& ACB} \quad \supset \& \& ACB \& BC}{\supset \& AC \& BC} \supset A \& BC$$

Для правила 5) осуществляется двойственная замена.

б) $\rightarrow$ в). Система S_2^0 не содержит правил с бесконечным числом посылок, поэтому выводимость в ней всегда является выводимостью с конечной высотой. Индукцией по h устанавливаем, что если $\mathcal{L} \vdash \mathcal{M}$ в S_2^0 с высотой h , то $\mathcal{L} \vdash \mathcal{M}$ в S_2^* с высотой $4h$. При этом второе правило заменяется по схеме

$$\frac{\frac{\frac{A \supset AB}{B} \supset BC}{C} (\mathbb{F}_Q^x([A^x]) \text{ ложна})}{\dots \supset \mathbb{F}_P^x([A^x])C \supset \mathbb{F}_Q^x([A^x])C \dots} \supset AC$$

правило 4^0 — по схеме

$(\mathbb{F}_P^x([A^x]) \text{ верна})$

$$\frac{\frac{A \supset AB}{B} \supset B \& AB}{\& AB} (\mathbb{F}_Q^x([A^x]) \text{ ложна})$$

$$\frac{\dots \supset \mathbb{F}_P^x([A^x]) \& AB \quad \dots \supset \mathbb{F}_Q^x([A^x]) \& AB \dots}{\supset A \& AB}$$

и правило 5^0 — по схеме

$(\mathbb{F}_P^x([\vee AB^x]) \text{ и } A \text{ верны})$

$$\frac{\frac{A \supset AB}{B} \quad (\mathbb{F}_Q^x([\vee AB^x]) \text{ и } B \text{ верны})}{B} (\mathbb{F}_R^x([\vee AB^x]) \text{ ложна})$$

$$\frac{\dots \supset \mathbb{F}_P^x([\vee AB^x])B \dots \quad \dots \supset \mathbb{F}_Q^x([\vee AB^x])B \dots \quad \dots \supset \mathbb{F}_R^x([\vee AB^x])B \dots}{\supset \vee ABV}$$

в) $\rightarrow$ г). Индукцией по h доказываем, что выводимость в S_2^* с высотой h влечет выводимость в S_2'' с высотой $2h$. Применение правила 9*) заменяется применением 9) и затем 2) с верной формулой $\supset A \exists X[A^x]$ в качестве левой посылки.

г) $\rightarrow$ а). Очевидно.

Теорема 2. Существует конструктивная последовательность $\{(\mathcal{L}_n, \mathcal{M}_n)\}$ пар формул языка $\mathcal{A}_2$ такая, что

1) $\mathcal{L}_n \vdash \mathcal{M}_n$ в S_2 ;

2) неверно, что при каждом n можно вывести $\mathcal{M}_n$ из $\mathcal{L}_n$ в некоторой подсистеме системы S_2 , не включающей в себя ни S_2' , ни S_2'' .

Построим требуемую последовательность. Пусть U — универсальная функция для одноместных частично-рекурсивных функций. Найдем для каждого числа n замкнутые формулы T_n^0 , T_n^1 и T_n^2 языка $\mathcal{Y}_1$ такие, что T_n^i верна тогда и только тогда, когда $U(n, n) = i$. Положим

$$E_n \equiv \bigvee T_n^0 T_n^1, \quad F_n \equiv T_n^1, \quad G_n \equiv \bigvee T_n^0 T_n^2,$$

$$H_n \equiv \& (=) \bigvee T_n^1 T_n^2, \quad I_n \equiv \bigvee (\neq) T_n^0,$$

$$\mathcal{L}_n \equiv \&\&\& \supset (=) (=) E_n \supset F_n G_n (=), \quad \mathcal{M}_n \equiv \& \supset H_n (\neq) I_n.$$

С учетом ложности формул $\& T_n^0 T_n^1$, $\& T_n^0 T_n^2$, $\& T_n^1 T_n^2$ без труда строится вывод $\mathcal{M}_n$ из $\mathcal{L}_n$ в S_2' . Для доказательства (2) определяем при каждом n классы $\mathfrak{R}_n^1$, $\mathfrak{R}_n^2$, $\mathfrak{R}_n^3$, $\mathfrak{R}_n^{4,9}$, $\mathfrak{R}_n^{5,9}$, $\mathfrak{R}_n^7$, $\mathfrak{R}_n^8$ формул $\mathcal{Y}_2$, содержащие соответственно

$\mathfrak{R}_n^1$: 1) верные формулы $\mathcal{Y}_1$,

2) все импликации,

3) формулу E_n ;

$\mathfrak{R}_n^2$: 1) все формулы $\mathcal{Y}_1$,

2) верные импликации,

3) импликации, посылка которых начинается знаком $\bigvee$ или $\exists$, или заключение — знаком $\&$,

4) импликации $\supset AB$ такие, что верна $\supset \& E_n G_n B$;

$\mathfrak{R}_n^3$: 1) все формулы $\mathcal{Y}_1$,

2) импликации $\supset AB$ такие, что верна $\supset A \bigvee F_n B$, $\supset \& A G_n B$;

$\mathfrak{R}_n^{4,9}$: 1) все формулы $\mathcal{Y}_1$,

2) импликации $\supset AB$ такие, что верна либо $\supset \& E_n G_n B$, либо $\supset \& E_n AB$;

$\mathfrak{R}_n^{5,9}$: 1) формулы B языка $\mathcal{Y}_1$ такие, что верна либо $\supset E_n F_n$, либо $\supset E_n B$,

2) импликации $\supset AB$ такие, что верна либо $\supset \& E_n A F_n$, либо $\supset \& E_n AB$;

$\mathfrak{R}_n^7$: 1) верные формулы $\mathcal{Y}_2$,

2) формулу $\mathcal{L}_n$;

$\mathfrak{R}_n^8$: 1) верные формулы $\mathcal{Y}_2$,

2) формулы $\mathcal{L}_n$, $\&\&\supset (=) (=) E_n \supset F_n G_n$, $\&\supset (=) (=) E_n$ и содержащие вместе с любыми формулами $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ конъюнкцию $\&\mathcal{L}\mathcal{M}$.

Определяем, кроме того, класс

$\mathfrak{R}_n^6$: 1) верные формулы $\mathcal{Y}_2$,

2) все формулы $\mathcal{Y}_1$ и все импликации,

3) формулы $\mathcal{L}_n$, $\&\&\supset (=) (=) E_n \supset F_n G_n$, $\&\supset (=) (=) E_n$.

Индукцией по выводу устанавливается, что в $\mathfrak{R}_n^i$ ($\mathfrak{R}_n^{i,j}$) входит всякая формула $\mathcal{M}$, выводимая из $\mathcal{L}_n$ без использования правила i (правил i, j). Для формулы $\mathcal{M}_n$, как легко убедиться, принадлежность к любому из описанных классов влечет ложность одной из формул T_n^0 , T_n^1 , T_n^2 . В подсистемах системы S_2 , не включающих в себя ни S_2' , ни S_2'' , отсутствует либо одно из правил 1), 2), 3), 6), 7), 8), либо правило 9) вместе с 4) или 5). Если бы выводы всех $\mathcal{M}_n$ из соответствующих $\mathcal{L}_n$ осуществлялись в таких системах, то, используя сказанное выше, мы получили бы эффективный метод нахождения ложной формулы T_n^i по числу n . Последнее стандартным путем приводится к противоречию с определением T_n^i .

Из теорем 1 и 2 в сочетании с теоремой Маркова об устранимости правила 9) вытекает, что среди подсистем S_2 полной системе эквивалентны те и только те, которые содержат S_2' или S_2'' . В частности, S_2' и S_2'' независимы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ A. A. Markov, Rev. Intern. Phil., № 98, 4, 477 (1971).