Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 5

УДК 519.21 МАТЕМАТИКА

В. Л. ГИРКО

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ СЛУЧАЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И ДЕТЕРМИНАНТОВ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 5 III 1973)

Рассмотрим квадратные матрицы $A_n=(\xi_{ij}^{(n)})$ n-го порядка. Пусть для каждого n случайные векторы $(\xi_{ij}^{(n)}, \xi_{ji}^{(n)})$, $i<j$, $i, j=1, \ldots, n$, и случайные величины $\xi_{ii}^{(n)}$, $i=1, \ldots, n$, независимы и существуют постоянные числа $a_{(n)}$ такие, что для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\leqslant i\leqslant n} P\left\{ \sum_{i=1}^{n} [(\xi_{ij}^{(n)}-a_{ij}^{(n)})^2+(\xi_{ji}^{(n)}-a_{ji}^{(n)})^2]\geqslant\varepsilon \right\}=0. \qquad (1)$$

Обозначим

$$\nu_{ij}^{(n)}=\xi_{ij}^{(n)}-b_{ij}^{(n)}, \qquad b_{ij}^{(n)}=a_{ij}^{(n)}+\int_{|x|<\tau} x\, dP\{\xi_{ij}^{(n)}-a_{ij}^{(n)}<x\},$$

$\tau>0$ — произвольное постоянное число, I — единичная матрица n-го порядка. Из величин $b_{ij}^{(n)}$ составим квадратную матрицу $B_n=(b_{ij}^{(n)})$.

Теорема 1. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \nu_{ii}^{(n)} \right| + \sum_{i,j=1}^{n} [\nu_{ij}^{(n)}]^2<\infty \right\}=1,$$

$$\sup_{n} [|\mathrm{Sp}(B_n+B_n')|+\mathrm{Sp}\, B_nB_n']\leqslant c<\infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\det(I+A_n)|<x\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} P\left\{ |\det(I+B_n)| \prod_{\substack{i>j\\ i,j=1}} \left| 1-\nu_{ij}^{(n)}\nu_{ji}^{(n)} \right| \prod_{i=1}^{n} \left| 1+\nu_{ii}^{(n)} \right| <x \right\}.$$

Предположим теперь, что для всех n матрицы A_n симметричны.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда, для того чтобы*

$$\{\ln|\det(I+iA_n)-a_n, \arg\det(I+iA_n)-b_n\}\Rightarrow\{\xi, \eta\}$$

при некотором подборе постоянных a_n, b_n, необходимо и достаточно, чтобы существовали неубывающие функции ограниченной вариации $G_1(x)$ и $G_2(x)$ такие, что

$$G_{n1}(x)=\sum_{\substack{p>e\\ p,e=1}}^{n} \int_{-\infty}^{x} \frac{y^2}{1+y^2}\, dP\{\nu_{pe}^{(n)}<y\}\Rightarrow G_1(x), \qquad (2)$$

$$G_{n2}(x)=\sum_{p=1}\int\limits_{-\infty}\frac{y^2}{1+y^2}dP\{\nu_{pp}^{(n)}<y\}\Rightarrow G_2(x),$$

$$\int\frac{1}{x}dG_{n2}(x)+\arg\det(I+iB_n)-b_n\to\gamma_2,\qquad \frac{1}{2}\ln\det(I+B_n^2)-a_n\to\gamma_1.$$

Тогда для всех t и $k=0, 1, 2, \ldots$

$$Me^{it\xi+ik\eta}=\exp\left\{it\gamma_1+ik\gamma_2+\int[(1+x^2)^{it}-1]\frac{1+x^2}{x^2}dG_1(x)+\right.$$

$$\left.+\int\left[\left(\frac{1+ix}{\sqrt{1+x^2}}\right)^k(1+x^2)^{it/2}-\frac{ikx}{1+x^2}-1\right]\frac{1+x^2}{x^2}dG_2(x)\right\}.$$

Рассмотрим систему линейных случайных алгебраических уравнений

$$C_nx_n=\vec{b}_n,$$

где $G_n=(\xi_{i}^{(n)})$ — квадратная матрица n-го порядка,

$$\vec{b}_n=(\eta_1^{(n)},\ldots,\eta_n^{(n)}),\qquad \vec{x}_n=(x_{1n},\ \ldots,x_{nn}).$$

Теорема 3. *Если для каждого n случайные величины $\xi_{ij}^{(n)}$, $\eta_i^{(n)}$, $i, j=1,\ldots,n$, независимы, одинаково распределены, $M\xi_{11}^{(n)}=0$, существуют конечные дисперсии* $\sup\limits_n D\xi_{11}^{(n)}>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\int|F_n(x)-\Phi(x)|dx=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\int x^2d|F_n(x)-\Phi(x)|=0,$$

где

$$F_n(x)=P\{\xi_{11}^{(n)}<x\},\qquad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}P\{x_{kn}<z\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}z.$$

Пусть задана система уравнений $(I+A_n)\vec{x}=\vec{b}_n$.

Теорема 4. *Если*

$$\lim_{n\to\infty}[\operatorname{Sp}(B_n+B_n')+\operatorname{Sp}B_nB_n']=0,\qquad \lim_{n\to\infty}P\{\det(I+A_n)=0\}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\nu_{ii}^{(n)}\right|+\sum_{i,j=1}^{n}[\nu_{ij}^{(n)}]^2+\sum_{i=1}^{n}[\eta_i^{(n)}]^2<\infty\right\}=1$$

и вместо условия (1) *выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{1\leqslant i\leqslant n}P\left\{\sum_{j=i}(\xi_{ji}^{(n)}-a_{ji}^{(n)})^2\geqslant\varepsilon\right\}=0, \qquad (3)$$

то

$$\lim P\{|x_{i_1n}|<z_{i_1},\ldots\ |x_{i_kn}|<z_{i_k}\}=$$

$$=\lim P\left\{\left|\ \eta_{i_1}^{(n)}\left(1-\sum_{j=i_1+1}\nu_{i_1j}^{(n)}\nu_{ji_1}^{(n)}\right)^{-1}\right|<z_{i_1},\ldots\right.$$

$$\ldots, \left| \eta_{i_k}^{(n)} \left(1 - \sum_{j=i_k+1}^{n} \nu_{i_k j}^{(n)} \nu_{j i_k}^{(n)}\right)^{-1} \right| < z_{i_k} \right\}.$$

Упорядочим модули собственных чисел матрицы A_n в невозрастающем порядке: $|\lambda_{1n}| \geqslant |\lambda_{2n}| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_{nn}|$.

Теорема 5. *Если выполняется условие 2, $G_1(x)$ непрерывна и*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} [b_{ij}^{(n)}]^2 = 0,$$

то для всех $k>m$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\lambda_{kn}^2 < x,\ \lambda_{mn}^2 < y\} =$$

$$= kC_{k-1}^{k-m-1} \int_0^y e^{K(t)}\, dK(t) \int_t^x [K(z) - K(t)]^{k-m-1} [-K(z)]^m\, dK(z),$$

где

$$K(x) = -\int_{-\infty}^{-x^{1/2}} \frac{1+z^2}{z^2}\, dG_1(z) - \int_{x^{1/2}}^{\infty} \frac{1+z^2}{z^2}\, dG_1(z); \qquad x, y > 0.$$

Следствие 1. *Если выполняются условия теоремы 5 и $G_1(x)$ дифференцируема, то*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\lambda_{kn}^2 < x\} = e^{K(x)} \sum_{m=0}^{k} \frac{[-K(x)]^m}{m!}, \qquad x>0.$$

Следствие 2. *Если случайные элементы ξ_{ij}; $i, j = 1, 2, \ldots$, матриц $A_n = (\xi_{ij})$ независимы, одинаково распределены и функции распределения $F(x)$ величин ξ_{ij}^2 принадлежат области притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем α, $0 < \alpha \leqslant 1$, то для любых $k>m$*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\lambda_{kn}^2}{c_n} < x,\ \frac{\lambda_{mn}^2}{c_n} < y\right\} =$$

$$= kC_{k-1}^{k-m-1} \alpha^2 \int_0^{by} e^{-t^{-\alpha}} t^{-\alpha-1}\, dt \int_t^{bx} (t^{-\alpha} - z^{-\alpha})^{k-m-1} z^{-\alpha m - \alpha - 1}\, dz,$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\lambda_{kn}^2}{c_n} < x\right\} = e^{-c(\alpha)/x^\alpha} \sum_{m=0}^{k} \frac{[c(\alpha)/x^\alpha]^m}{m!},$$

где $x, y>0$, $b = [c(\alpha)]^{-1/\alpha}$; $c(\alpha)>0$, если $\alpha<1$, и $c(\alpha)=0$, если $\alpha=1$. Постоянные c_n выбраны так, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} n^2 [1 - F(xc_n)] = c(\alpha) x^{-\alpha}.$$

Теорема 6. *Если вместо условия* (1) *выполняется условие* (3) *и*

$$\sup_n \operatorname{Sp} B_n^2 < \infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} P\{\lambda_{i_1 n}<x_{i_1},\ldots,\lambda^2_{i_k n}<x_{i_k}\}=\lim_{n\to\infty} P\{\varkappa_{i_1 n}<x_{i_1},\ldots,\varkappa_{i_k n}<x_{i_k}\},$$

где $\varkappa_{1n}\geqslant\varkappa_{2n}\geqslant\ldots\geqslant\varkappa_{nn}$ *— собственные числа матрицы*

$$B_n^2+\mathrm{diag}\left\{2\sum_{j=i}^{n}[\nu_{ji}^{(n)}]^2+\left(\sum_{j=i}^{n}[\nu_{ji}^{(n)}]^2\right)^2,\ i=1,\ldots,n\right\}$$

$i_1, i_2, \ldots, i_k$ *— любые целые числа от* 1 *до* n.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
20 II 1973