Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 5

УДК 539.3 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

А. Н. ГУЗЬ

ОБ АНАЛОГИЯХ МЕЖДУ ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫМИ И ЛИНЕЙНЫМИ ЗАДАЧАМИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 18 VII 1973)

Установление аналогий между линейными и линеаризированными задачами теории упругости позволяет для получения решений последних использовать уже известные решения линейных задач. Для частных случаев однородного начального состояния такие аналогии установлены в ([1]). В настоящей статье исследуем в общем случае вопрос о возможности существования аналогий между линейными и линеаризованными задачами теории упругости и укажем необходимые и достаточные условия существования таких аналогий.

Введем лагранжевые криволинейные координаты θ_i; тело будем считать гиперупругим, сжимаемым с произвольным потенциалом Φ, который представляет собой дважды непрерывно дифференцируемую функцию компонент тензора деформаций Грина. Величины, относящиеся к начальному состоянию, будем отмечать индексом нуль и применим теорию больших (конечных) начальных деформаций ([2]). В этом случае по аналогии с ([3]) линеаризированные уравнения можем представить в следующей форме:

$$\nabla_i(\omega^{im\alpha\beta}\nabla_\beta u_\alpha)+X^m-\rho\ddot{u}^m=0. \tag{1}$$

Граничные условия в напряжениях на части поверхности S_1 принимают соответственно вид

$$N_i\omega^{im\alpha\beta}\nabla_\beta u_\alpha|_{S_1}=P^m. \tag{2}$$

Граничные условия в перемещениях на части поверхности S_2, а также граничные и начальные условия в случае динамических задач записываются в обычной форме.

В (1) и (2) введены следующие обозначения: u^m — контрвариантные составляющие возмущения вектора перемещения; X^m и P^m — контрвариантные составляющие возмущений векторов объемных и поверхностных сил, отнесенных соответственно к единице объема и единице поверхности тела в недеформированном состоянии; ρ — плотность материала в недеформированном состоянии; N_i — ковариантные составляющие орта-нормали к поверхности тела в недеформированном состоянии. В силу использования лагранжевых координат под объемом и поверхностью тела следует понимать эти величины в недеформированном состоянии.

Кроме того, в (1) и (2) входит еще тензор четвертого ранга ω, компоненты которого определяются через упругий потенциал в начальном деформированном состоянии:

$$\omega^{im\alpha\beta}=\frac{1}{4}(\delta_n{}^m+\nabla_n u_0{}^m)(\delta_t{}^\alpha+\nabla_t u_0{}^\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial \overset{0}{\varepsilon}_{t\beta}}+\frac{\partial}{\partial \overset{0}{\varepsilon}_{\beta t}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \overset{0}{\varepsilon}_{in}}+\frac{\partial}{\partial \overset{0}{\varepsilon}_{ni}}\right)\Phi^0+$$

$$+\frac{1}{2}g^{m\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \overset{0}{\varepsilon}_{i\beta}}+\frac{\partial}{\partial \overset{0}{\varepsilon}_{\beta i}}\right)\Phi^0;$$

$$2\overset{0}{\varepsilon}_{ij}=\nabla_i u_j{}^0+\nabla_j u_i{}^0+\nabla_j u_0{}^m\nabla_i u_m{}^0. \tag{3}$$

Выражения (1) и (2) напоминают соответствующие соотношения линейной теории упругости анизотропного неоднородного тела. Действительно, если ввести тензор модулей упругости E, то уравнения движения в этом случае принимают вид уравнений для линейной задачи:

$$\nabla_i (E^{im\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha) + Y^m - \rho \ddot{u}^m = 0. \tag{4}$$

Граничные условия в напряжениях на части поверхности S_1 принимают вид

$$N_i E^{im\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha |_{S_1} = Q^m. \tag{5}$$

Граничные условия в перемещениях на части поверхности S_2 и начальные условия записываются обычным образом.

Из выражений (1), (2), (4), (5), а также граничных условий в перемещениях и начальных условий следует, что для существования аналогии между линеаризованными задачами и линейными задачами для анизотропного тела необходимо и достаточно выполнения двух условий: 1) совпадение формы тел, а также частей поверхностей S_1 и S_2, правых частей граничных условий в перемещениях, а также правых частей начальных условий, плотностей, возмущений объемных и поверхностных сил с объемными и поверхностными силами; 2) совпадение тензоров ω и E с точностью до скалярного множителя. Заметим, что здесь не был осуществлен переход к безразмерным величинам, так как он в вопросе о возможности существования аналогий новых сведений не дает.

Первое из указанных выше условий всегда можно выполнить. Таким образом, вопрос о возможности существования аналогии сводится к вопросу о возможности выбора тензора модулей упругости E, совпадающего с тензором ω. Последний же вопрос решается положительно, если тензоры E и ω имеют одинаковую симметрию. Тензор модулей упругости E, как известно, имеет следующие свойства:

$$E^{im\alpha\beta} = E^{mi\alpha\beta}; \quad E^{im\alpha\beta} = E^{im\beta\alpha}; \quad E^{im\alpha\beta} = E^{\alpha\beta im}. \tag{6}$$

Тензор ω имеет следующие свойства:

$$\omega^{im\alpha\beta} \neq \omega^{mi\alpha\beta}; \quad \omega^{im\alpha\beta} \neq \omega^{im\beta\alpha}; \quad \omega^{im\alpha\beta} = \omega^{\beta\alpha mi}. \tag{7}$$

В справедливости первых двух свойств (7) можно убедиться, если выбрать частный вид упругого потенциала как функцию только первого алгебраического инварианта тензора деформаций Грина, последнее свойство (7) следует непосредственно из (3). Свойства (7) в прямоугольных координатах рассматривались в ([3]). Из свойств (6) и (7) тензоров E и ω следует, что эти тензоры имеют неодинаковые свойства симметрии. Таким образом, в общем случае отсутствует аналогия между линеаризированными и линейными задачами теории упругости. Необходимо отметить, что несмотря на отсутствие аналогии все же линеаризированные задачи при определенном виде возмущений объемных и поверхностных сил являются самосопряженными ([4]).

Заметим, что аналогия в общем случае отсутствует и для упрощенной постановки линеаризированных задач, когда начальное состояние определяется по геометрически линейной теории. В этом случае вместо (3) получаем

$$\omega^{im\alpha\beta} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon^0_{im}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon^0_{mi}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon^0_{\alpha\beta}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon^0_{\beta\alpha}}\right)\Phi^0 + \frac{1}{2} g^{m\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon^0_{i\beta}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon^0_{\beta i}}\right)\Phi^0;$$

$$2\varepsilon_{ij} = \nabla_i u_j^0 + \nabla_j u_i^0. \tag{8}$$

Тензор ω, определенный соотношениями (8), также имеет свойства (7), в связи с этим в общем случае аналогия отсутствует и для упрощенной постановки линеаризированных задач.

Поскольку в общем случае аналогия отсутствует, то представляется целесообразным получить необходимые и достаточные условия существования аналогии в частных случаях, так как примеры существования таких аналогий уже приведены ([1]). Считая первое условие уже выполненным (его можно выполнить всегда), покажем, что необходимыми и достаточными условиями существования аналогий в частных случаях являются следующие свойства симметрии тензора:

$$\omega^{im\alpha\beta}=\omega^{mi\alpha\beta}; \qquad \omega^{im\alpha\beta}=\omega^{im\beta\alpha}. \tag{9}$$

Необходимость следует из того положения, что если имеется аналогия, то тензор ω должен иметь такие же свойства, как и тензор E, в частности первые два свойства (6). Достаточность следует из того положения, что свойства (9) совместно с третьим свойством (7) обеспечивают выполнение свойств (6).

Институт механики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
6 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Гузь, Прикл. мех., 8, 5, 105 (1972). [2] A. S. Green, R. S. Rivlin, R. T. Shield, Proc. Roy. Soc. A, **211**, 1104, 7 (1952). [3] А. Н. Гузь, Прикл. мех., 8, 1, 10 (1972). [4] И. Ю. Бабич, А. Н. Гузь, ДАН, 202, № 4, 795 (1972).