

В. В. ВЬЮГИН

О МИНИМАЛЬНЫХ НУМЕРАЦИЯХ ВЫЧИСЛИМЫХ КЛАССОВ РЕКУРСИВНО-ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 11 I 1973)

Все нумерации, рассматриваемые ниже, являются вычислимыми нумерациями классов рекурсивно-перечислимых множеств натуральных чисел. Нумерация класса \mathfrak{A} называется минимальной, если всякая нумерация этого класса, сводящаяся к ней, ей эквивалентна. Однозначная и позитивная нумерации являются минимальными. Все эти и используемые в дальнейшем понятия имеются в книге (1). В работах (2-5) строится достаточно много примеров классов, обладающих минимальными нумерациями, и находятся различные достаточные условия для существования таких нумераций. Однако до настоящего времени не был известен пример вычислимого класса (т. е. имеющего вычислимую нумерацию), который не имел бы минимальных нумераций. Вопрос о существовании такого класса был поставлен в (2). Следующая теорема дает ответ на этот вопрос.

Теорема. *Существует вычислимый класс рекурсивно-перечислимых множеств, не имеющий минимальных нумераций.*

Доказательство. Пусть $\langle x, y \rangle$ — номер пары натуральных чисел x и y в канторовской нумерации всех пар натуральных чисел, $l(x)$ — левая нумерационная функция, $l(\langle x, y \rangle) = x$. $\pi(x, y)$ — вычислимая нумерация такая, что для всякой вычислимой нумерации β произвольного класса рекурсивно-перечислимых множеств существует x такое, что для всех $y \geq 0$ $\beta(y) = \pi(x, y)$. π_0 — гёделевская нумерация класса всех рекурсивно-перечислимых множеств.

Укажем конструкцию искомого класса \mathfrak{A} и его вычислимой нумерации α . Одновременно будем строить семейство рекурсивно-перечислимых множеств $\{M_x \mid x \geq 0\}$ и функции, трехместные h_1, h_2, c и двухместную b . Мы будем использовать понятие x -последователя, где x — натуральное число. На шаге n число будет называться неиспользованным, если оно нечетно и еще не перечислено ни в одно из множеств $\alpha(x), M_x$.

Шаг 0. Для всех x, y определим $c(x, y, 0) = 0$. 0 засылаем в M_0 .

Индукционные предположения: после того как были выполнены все инструкции шага $n - 1$, $n \geq 1$, для всех x, y $c(x, y, n - 1)$ определено; если $2x$ имеет y -последователя, то $h_1(x, y, n - 1), h_2(x, y, n - 1)$ определены.

Шаг n , $n \geq 1$. Пусть $l(n) = \langle m, k \rangle$. Всегда имеет место один из пяти случаев, исключаящих друг друга.

Случай 1. Число $2m$ не имеет k -последователя. В таком случае, если пара (m, k) не была запрещена на предыдущих шагах и верно условие

$$\forall x (x < k \& 2m \text{ имеет } x\text{-последователя} \Rightarrow c(m, x, n - 1) \geq k), \quad (1)$$

то делаем следующее. Наименьшее число y , которое не является последователем, делаем k -последователем $2m$. Пусть z_1, z_2 — наименьшие два неравных неиспользованных числа. z_1 и z_2 засылаем в $\alpha(y)$. Определим $h_1(m, k, n) = z_1, h_2(m, k, n) = z_2$. Переходим к (*), см. ниже. Если на одном из предыдущих шагов пара (m, k) была запрещена или неверно условие (1), то сразу переходим к (*).

Если случай 1 не имеет места, то $2m$ имеет k -последователя ($uh_1(m, k, n-1)$, $h_2(m, k, n-1)$ определены по предположению индукции), обозначим его в этом случае через x_0 .

Случай 2. Случай 1 места не имеет, значение функции b на паре (m, k) еще не было определено и верно условие

$$(\exists y \leq n) (\{4m, h_1(m, k, n-1)\} \subseteq \pi^n(m, y)). \quad (2)$$

В таком случае определим $b(m, k) = y_0$, где y_0 — наименьшее y , удовлетворяющее (2), и переходим к (*).

Случай 3. Случай 1 и 2 не имеют места, значение функции b на паре (m, k) уже определено и $b(m, k) \in \pi^n(k)$. В таком случае запрещаем пару (m, k) , освобождаем x_0 , делаем x_0 0-последователем числа $2\langle m, k \rangle + 1$, переходим к (*).

Случай 4. Случай 1—3 не имеют места, значение функции b на паре (m, k) уже определено, $h_2(m, k, n-1) \in \pi^n(m, b(m, k))$, $4m + 2 \notin \pi^n(m, b(m, k))$. В таком случае делаем следующее. Определим $h_1(m, k, n) = h_2(m, k, n-1)$, $h_2(m, k, n) = z$, где z — наименьшее неиспользованное число, $c(m, k, n) = c(m, k, n-1) + 1$. z засылаем в $\alpha(x_0)$, $h_1(m, k, n-1)$ засылаем в M_{2m} . Переходим к (*).

Случай 5. Случай 1—4 не имеют места. В таком случае сразу переходим к (*).

(*) $2n$ засылаем в M_n . Все элементы, имеющиеся в $M_{l(n)}$, засылаем в каждое M_j , где $l(n) < j \leq n$ и в каждое $\alpha(y)$, где y — какой-либо последователь $l(n)$. Для всех x, y при $i = 1, 2$, если $h_i(x, y, n-1)$ определено, $h_i(x, y, n)$ еще не определено, определим $h_i(x, y, n) = h_i(x, y, n-1)$; если $c(x, y, n)$ еще не определено, то определим $c(x, y, n) = c(x, y, n-1)$. Переходим к шагу $n + 1$.

Легко проверить, что все индукционные предположения выполнены. Пусть $\mathfrak{A} = \{\alpha(x) \mid x \geq 0\}$. Из эффективности построения следует, что α — вычислимая нумерация класса \mathfrak{A} .

Число y называется постоянным x -последователем i , если на некотором шаге y становится x -последователем i и в дальнейшем не освобождается. В последующем рассуждении основную роль будут играть следующие леммы.

Лемма 1. Для каждого y существуют такие x, i , что на некотором шаге y становится постоянным x -последователем i .

Лемма 2. Для каждого i множество $\{\alpha(x) \mid \exists y (x \text{ — постоянный } y\text{-последователь } i)\}$ конечно или пусто.

Лемма 3. Для каждой вычислимой нумерации β класса \mathfrak{A} существует такое m , что $M_{2m} \in \mathfrak{A}$ и $\beta^{-1}(M_{2m})$ неперечислимо.

Пусть β — произвольная вычислимая нумерация класса \mathfrak{A} . По лемме 3 существует такое m , что $M_{2m} \in \mathfrak{A}$ и $\beta^{-1}(M_{2m})$ неперечислимо. $M_{2m} = \alpha(y)$ для некоторого y . Легко видеть, что y — постоянный последователь $2m$.

Пусть для некоторых j, i x является постоянным j -последователем i . Тогда из конструкции нетрудно доказать, что $4m + 2 \in \alpha(x)$ если $i > 2m$, $4m + 2 \notin \alpha(x)$, если $i \leq 2m$. Пусть $\mathfrak{A}_1 = \{X \mid X \in \mathfrak{A} \& 4m + 2 \in X\}$. Тогда $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1 = \{\alpha(x) \mid \exists t \exists y (x \text{ — постоянный } y\text{-последователь } t \& t \leq 2m)\} =$

$= \bigcup_{t=0}^{2m} \{\alpha(x) \mid \exists y (x \text{ — постоянный } y\text{-последователь } t)\}$ — конечный или пустой класс, что следует из леммы 2.

$M_{2m} \in \mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1$. Пусть $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1 = \{B_0, B_1, \dots, B_{k-1}\}$, $B_0 = M_{2m}$. $\beta^{-1}(\mathfrak{A}_1) = \{x \mid 4m + 2 \in \beta(x)\}$ — рекурсивно-перечислимо. Пусть общерекурсивная функция f перечисляет это множество. Определим

$$g(x) = \begin{cases} a_x, & \text{если } x < k, \\ f(x - k), & \text{если } x \geq k, \end{cases} \text{ где } \beta(a_x) = B_x, \quad x = 0, 1, \dots, k-1.$$

Определим нумерацию γ класса \mathfrak{A} : $\gamma(x) = \beta g(x)$ для всех x . Тогда $\gamma^{-1}(M_{2m})$ — одноэлементное множество, $\beta^{-1}(M_{2m})$ — неперечислимое. Зна-

чит, β не сводится к γ . По определению, γ сводится к β . Значит, β — не минимальная нумерация. Следовательно, построенный класс \mathfrak{A} не имеет минимальных нумераций.

Теорема доказана.

В заключение выражаю глубокую благодарность В. А. Успенскому, который обратил мое внимание на эту задачу.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Получено
10 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. Л. Ершов, Теория нумераций, Новосибирск, 1969. ² С. С. Марченков, ДАН, 198, № 3 (1971). ³ А. Б. Хуторецкий, Алгебра и логика, 8, № 4 (1969).
⁴ A. H. Lachlan, Zs. Math. Logik u. Grundlag. Math., 11, № 3 (1965). ⁵ M. B. Pour-El, W. A. Howard, *ibid.*, 10, № 2 (1964).