Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 6

УДК 517.941.92

МАТЕМАТИКА

Академик Н. Н. КРАСОВСКИЙ

ПРОГРАММНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ДЛЯ ПОЗИЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

В статье рассматриваются дифференциальные игры, формализованные согласно ([1], [2]). Обсуждаются программные конструкции, оценивающие исход позиционной игры.

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \tag{1}$$

где x — фазовый вектор, u, v — векторы управляющих воздействий первого и второго игроков; $u \in P$, $v \in Q$, причем P и Q — компакты; непрерывная функция f дифференцируема по x и удовлетворяет условию $\|f\| \leqslant (1 + \|x\|)\lambda$, $\lambda = \mathrm{const}$, $\|x\|$ — эвклидова норма x. Следуя ([1]), рассмотрим позиционную игру сближения с замкнутым множеством к моменту ϑ из позиции $\{t_0, x_0\}$.

Задача 1. Найти: $1)_{\mathrm{I}}$ стратегию $u(t, x)$, $2)_{\mathrm{I}}$ смешанную стратегию $\mu_{(t,x)}(du)$ или $3)_{\mathrm{I}}$ контрстратегию $u(t, x, v)$, которая обеспечивает встречу всех движений $x[t]$ с M не позднее, чем к моменту ϑ.

Рассмотрим программные управления ([2]), изображаемые условными вероятностными мерами $\eta_t(du, dv)$ на $P \times Q$ при $t_0 \leqslant t < \vartheta$. Слабую сходимость для η_t будем понимать как слабую сходимость мер $\eta_t \cdot dt$. Назовем *верхней программой* $\{\eta\}^{\text{п}}$ множество, удовлетворяющее условиям:

$1)_{\mathrm{I}}$ программа $\{\eta\}^{\text{п}}$ складывается из всех слабых пределов управлений η_t^{Δ}, $\eta_t^{\Delta} = \eta^{\Delta}_{(\tau_i)}$ при $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$, при $\delta_{\Delta} = \sup\limits_i (\tau_{i+1} - \tau_i) \to 0$, где $\eta^{\Delta}_{(\tau)} = \nu_\tau(dv; u) \cdot \mu_\tau^{\Delta}(du; \nu_\tau(dv; u))$, причем $\nu_\tau(dv; u)$ пробегает все условные (по τ и u) вероятностные меры на Q, а $\mu_\tau^{\Delta}(du; v)$ — функция на $\{\tau, \nu\}$, значения которой суть вероятностные меры на P;

$2)_{\mathrm{I}}$ программа $\{\eta\}^{\text{п}}$ складывается из всех слабых пределов управлений η_t^{Δ} при $\delta_{\Delta} \to 0$, где $\eta^{\Delta}_{(\tau)} = \nu_\tau(dv) \cdot \mu_\tau^{\Delta}(du; \nu_\tau(dv))$, причем $\nu_\tau(dv)$ пробегает все условные меры;

$3)_{\mathrm{I}}$ множество $\{\eta\}^{\text{п}}$ слабозамкнуто, для всякой условной меры $\nu_t(dv)$, в $\{\eta\}^{\text{п}}$ найдется управление η_t, удовлетворяющее условию

$$\int\limits_P \eta_t(du, dv) = \nu_t(dv) \tag{2}$$

при почти всех t; если $\nu_t^{(1)}$ и $\nu_t^{(2)}$ совпадают на измеримом $T \in [t_0, \vartheta)$, то в $\{\eta\}^{\text{п}}$ найдутся $\eta_t^{(1)}$ и $\eta_t^{(2)}$, связанные с $\nu_t^{(1)}$ и $\nu_t^{(2)}$ условием (2) и совпадающие на T.

Примечание. Достаточно, чтобы $\nu_t(dv; u)$ и $\nu_t(dv)$ пробегали лишь все меры ν^*, удовлетворяющие условиям:

$1)_{\mathrm{I}}$ $\int s' f \nu_t^*(dv; u) = \max\limits_v s' f$;

$2_{\mathrm{I}})$ $\iint s' f \nu_t^*(dv) \cdot \mu^*(du) = \max\limits_\nu \min\limits_\mu \iint s' f \nu(dv) \cdot \mu(du)$;

$3)_{\mathrm{I}}$ $\int \min\limits_u s' f \nu_t^*(dv) = \max\limits_v \min\limits_u s' f$

при всевозможных выборах вектора s' (штрих в верхнем индексе означает транспонирование).

Пусть $x(t)=x(t, t_0, x_0, \eta)$ — програмное движение,

$$\dot{x}(t)=\iint_{PQ} f(t, x(t), u, v)\,\eta_t(du, dv),$$

символ M_t означает сечение M гиперплоскостью $t=\mathrm{const}$, $\rho(x, M_t)$ — эвклидово расстояние от x до M_t.

Задача $\mathrm{I}^{(\Pi)}$. Найти $t^0\geqslant t_0$, программу $\{\eta\}^{\Pi 0}$ и управление $\eta_t{}^0$ из условия

$$\rho(x(t^0, t_0, x_0, \eta^0), M_{t^0}) = \min_{t_0\leqslant t\leqslant\vartheta}\ \min_{\{\eta\}^\Pi}\ \max_{\eta\in\{\eta\}^\Pi} \rho(x(t, t_0, x_0, \eta), M_t) = \\ = \varepsilon^0(t_0, x_0; i), \quad i=1)_{\mathrm{I}},\ 2)_{\mathrm{I}},\ 3)_{\mathrm{I}}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть* $\varepsilon^0(t_0, x_0;\ i)=0$. *Тогда при соответствующем* i *задача* I *разрешима. Если маленькая игра* [1] $\varkappa=\min\limits_{a}\max\limits_{v} s'f$, $u\in P$, $v\in Q$, *при всяких* s, x *и* t *имеет седловую точку* $\{u^0, v^0\}$, *то задача* I *разрешима в случае* $1)_{\mathrm{I}}$, *если хотя бы* $\varepsilon^0(t_0, x_0; 3)_{\mathrm{I}})=0$.

При условиях теоремы 1 множество $W[\{t, x\}: x=x(t, t_0, x_0, \eta)$, $\eta_t\in\{\eta\}^{\Pi 0}$, $t_0\leqslant t\leqslant t^0]$ есть стабильный мост [1] и задачу I разрешают стратегии, экстремальные [1] к W.

Назовем **нижней программой** $\{\eta\}_\Pi$ множество, удовлетворяющее условиям:

$1)_{\mathrm{I}}$ множество $\{\eta\}_\Pi$ слабо замкнуто, для всякой условной меры $\mu_t(du)$ в $\{\eta\}_\Pi$ найдется управление η_t, удовлетворяющее условию

$$\int_Q \eta_t(du, dv)=\mu_t(du) \tag{4}$$

при почти всех t, если $\mu_t^{(1)}$ и $\mu_t^{(2)}$ совпадают на измеримом $T\in[t_0, \vartheta)$, то в $\{\eta\}_\Pi$ найдутся $\eta_t^{(1)}$ и $\eta_t^{(2)}$, связанные с $\mu_t^{(1)}$ и $\mu_t^{(2)}$ условием (4) и совпадающие на T;

$2)_{\mathrm{I}}$ множество $\{\eta\}_\Pi$ слабо замкнуто и содержит все управления вида $\eta_t=\mu_t(du)\nu_t(dv)$, где ν_t — фиксированная условная мера;

$3)_{\mathrm{I}}$ программу $\{\eta\}_\Pi$ составляют все η_t, стесненные равенством (2), где ν_t — фиксированная условная мера.

Задача $\mathrm{I}_{(\Pi)}$. Для позиции $\{t_*, x_*\}$, $t_0\leqslant t_*\leqslant\vartheta$, найти $t^0\geqslant t_0$, программу $\{\eta\}_\Pi{}^0$ и управление $\eta_t{}^0$ из условия

$$\rho(x(t^0, t_0, x_0, \eta^0), M_{t^0}) = \min_{t_0\leqslant t\leqslant\vartheta}\ \max_{\{\eta\}_\Pi}\ \min_{\eta\in\{\eta\}_\Pi} \rho(x(t, t_0, x_0, \eta), M_t) = \\ = \varepsilon_0(t_0, x_0; i), \quad i=1)_{\mathrm{I}},\ 2)_{\mathrm{I}},\ 3)_{\mathrm{I}}. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть* $\varepsilon_0(t_0, x_0;\ i)=0$ *и для всякой позиции* $\{t_*, x_*\}$, *где* $0<\varepsilon(t_0, x_0;\ i)<\alpha$ $(\alpha>0-\mathrm{const})$, *по крайней мере для одного значения* t^0 *управление* $\eta_t{}^0$ *из* (5) *и точка* $x_M\in M_{t^0}$, *ближайшая к* $x^0(t^0)=x^0(t^0, t_*, x_*, \eta^0)$, *единственны.*

Тогда при соответствующем i *задача* 1 *разрешима. Если маленькая игра на* $\min\limits_{u}\max\limits_{v} s'f$ *при всяких* s, x *и* t *имеет седловую точку, то задача* I *разрешима в случае* $1)_{\mathrm{I}}$, *если хотя бы* $\varepsilon_0(t_0, x_0; 3)_{\mathrm{I}})=0$.

При условиях теоремы 2 множество $W[\{t, x\}: \varepsilon_0(t, x;\ i)=0,\ t_0\leqslant t\leqslant\vartheta]$ есть стабильный мост [1] и задачу 1 разрешают стратегии, экстремальные к W. Управления $\eta_t{}^0$, удовлетворяющие условиям теоремы 2, удовлетворяют условиям:

в случае $1)_{\mathrm{I}}$

$$\iint_{PQ} s'(t) f(t, x^0(t), u, v)\,\eta_t^0(du, dv) = \min_{u\in P}\max_{v\in Q} s'(t) f(t, x^0(t), u, v); \tag{6}$$

в случае $2)_{\rm I}$

$$\iint\limits_{PQ} s'(t) f(t, x^0(t), u, v)\, \eta_t^0(du, dv) =$$

$$= \min_{\mu} \max_{\nu} \iint\limits_{PQ} s'(t) f(t, x^0(t), u, v)\, \mu(du)\, \nu(dv); \tag{7}$$

в случае $3)_{\rm I}$

$$\iint\limits_{PQ} s'(t) f(t, x^0(t), u, v)\, \eta_t^0(du, dv) = \max_{v\in Q} \min_{u\in P} s'(t) f(t, x^0(t), u, v) \tag{8}$$

при почти всех t. Здесь $s(t)$ — решение сопряженного уравнения

$$s'(t) = -\iint\limits_{PQ} \left\{ \frac{\partial f(t, x^0(t), u, v)}{\partial x} \right\}' \eta_t^0(du, dv) \tag{9}$$

при краевом условии $s(t^0) = x^0(t^0) - x_M$. Условия (6)—(9) отвечают здесь принципу максимума ([3]).

При $\varepsilon^0(t_0, x_0;\ i) > 0$, если управление η_t^0 из задачи $1^{(\Pi)}$ в своей программе $\{\eta\}^{\Pi_0^0}$ единственно и точка x_M тоже единственна, то и это управление η_t^0 удовлетворяет условиям, подобным (6)—(9).

Следуя ([1]), рассмотрим теперь позиционную игровую задачу об уклонении от замкнутого множества M вплоть до момента ϑ из позиции $\{t_0, x_0\}$.

Задача II. Найти: $1)_{\rm II}$ стратегию $u(t, x)$, $2)_{\rm II}$ смешанную стратегию $\mu_{\{t,x\}}(du)$ или $3)_{\rm II}$ контрстратегию $u(t, x, v)$, которая обеспечивает уклонение всех движений $x[t]$ от M вплоть до момента ϑ.

Задача $\mathrm{II}^{(\Pi)}$. Найти программу $\{\eta\}^{\Pi^0}$, управление η_t^0 и значение $t^0 \geqslant t_0$ из условия

$$\rho(x(t^0, t_0, x_0, \eta^0), M_{t^0}) = \max_{\{\eta\}^\Pi} \min_{\eta\in\{\eta\}^\Pi} \min_{t_0\leqslant t\leqslant\vartheta} \rho(x(t, t_0, x_0, \eta), M_t) =$$
$$= \varepsilon^0(t_0, x_0;\ i), \quad i = 1)_{\rm II},\ 2)_{\rm II},\ 3)_{\rm II}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\varepsilon^0(t_0, x_0;\ i) > 0$, $i = 1)_{\rm II}$, *или* $i = 2)_{\rm II}$, *или* $i = 3)_{\rm II}$. *Тогда при соответствующем i задача* II *разрешима. Если маленькая игра на* $\min\limits_u \max\limits_v s'f$ *при всяких s, x и t имеет седловую точку, то задача* II *разрешима в случае* $1)_{\rm II}$, *если хотя бы* $\varepsilon^0(t_0, x_0;\ 3)_{\rm II}) > 0$.

При условиях теоремы 3 множество $W[\{t, x\}$: $x = x(t, t_0, x_0, \eta)$, $\eta_t \in \{\eta\}^{\Pi^0}$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, есть стабильный мост и задача II разрешают стратегии, экстремальные к W.

Задача $\mathrm{II}_{(\Pi)}$. Для позиции $\{t_*, x_*\}$, $t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta$, найти $t^0 \geqslant t_0$, программу $\{\eta\}_{\Pi}{}^0$ и управление η_t^0 из условия (5), где $i = 1)_{\rm II}$, $2)_{\rm II}$, $3)_{\rm II}$.

Обозначим символом $S(t_*, x_*)$ множество всех векторов $s = s(t_*)$, отвечающих решениям $s(t)$ из (9), $s(t^0) = x^0(t^0) - x_M$; символом $F(t_*, x_*)$ обозначим в случаях:

$1)_{\rm II}$ $F = \overline{\rm co}\{f\}$, $\quad v = v(u)$, $\quad u \in P$,

$2)_{\rm II}$ $F = \overline{\rm co}\{\bar f\}$, $\quad \bar f = \int f\nu(dv)$, $\quad u \in P$,

$3)_{\rm II}$ $F = \overline{\rm co}\{f\}$, $\quad u \in P$; $\overline{\rm co}\{f\}$ — выпуклая замкнутая оболочка множества $\{f\}$.

Теорема 4. *Пусть* $\varepsilon_0(t_0, x_0;\ i) > 0$, $i = 1)_{\rm II}$, *или* $2)_{\rm II}$, *или* $3)_{\rm II}$, *и для всякой позиции* $\{t_*, x_*\}$ *из области* $0 < \varepsilon(t_*, x_*;\ i) < \alpha$, $\alpha > 0 - \mathrm{const}$: $1)_{\rm II}$ *для всякой функции* $v(u) \in Q$, $2)_{\rm II}$ *для всякой вероятностной меры* $\nu(dv)$

на Q, $3)_{\text{II}}$ *для всякого вектора* $v \in Q$ *во множестве* $F(t_*, x_*)$ *найдется вектор* f^*, *удовлетворяющий условию:*

$1)_{\text{II}}$ $s'f^* \geqslant \max\limits_u \min\limits_v s'f, u \in P, \quad v \in Q$,

$2)_{\text{II}}$ $s'f^* \geqslant \max \min s'f\mu(du)\nu(dv)$,

$3)_{\text{II}}$ $s'f^* \geqslant \min\limits_v \max\limits_u s'f, u \in P, v \in Q$ *при всех* $s \in S(t_*, x_*)$.

Тогда при соответствующем значении i *задача* II *разрешима. Если маленькая игра на* $\min\limits_u \max\limits_v s'f$ *при всяких* s, x *и* t *имеет седловую точку*, *то задача* II *разрешима в случае* $1)_{\text{II}}$, *если хотя бы* $\varepsilon_0(t_0, x_0, 3)_{\text{II}}) > 0$.

При условиях теоремы 4 множество $W[\{t, x\}: \varepsilon_0(t, x; i) \geqslant \varepsilon_0(t_0, x_0; i) > 0, t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta]$ есть стабильный мост и задачу II разрешают стратегии, экстремальные к W.

Институт математики и механики
Уральского научного центра Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
14 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Красовский, Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, № 2 (1973). [2] То же, № 3 (1973). [3] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский и др., Математическая теория оптимальных процессов, М.— Л., 1960.