Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 6

УДК 517.514 МАТЕМАТИКА

М. А. ЛЕЙЗИН

К ТЕОРЕМАМ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком С. М. Никольским 21 XII 1972)

Ряд задач математической физики приводит к рассмотрению дифференциальных операторов с особенностью на граничном многообразии. Примером такого оператора является оператор Бесселя $B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}$, $k > 0$, с особенностью при $y = 0$. Построенная для таких операторов шкала гильбертовых пространств изучалась в работе ([1]) методом преобразования Фурье — Бесселя; там же были доказаны соответствующие теоремы вложения.

В настоящей работе строятся весовые классы, являющиеся областью определения некоторого оператора вложения. В частности, получены достаточные условия ограниченности оператора вложения в этих классах, а также ограниченности его в гёльдеровских пространствах и пространстве непрерывных функций. Далее изучаются следы функций данных классов на гиперплоскости коразмерности 1. Показаны ограниченность оператора сужения функций данных классов на гиперплоскость коразмерности 1 и существование оператора подъема с такой гиперплоскости.

Пусть E_{n+1}^+ обозначает полупространство $x_{n+1} = y > 0$ эвклидова $(n+1)$-мерного пространства точек $x = (x', y)$, где $x' = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n$. Пусть $C_0^{(l)}(\overline{E_{n+1}^+})$, $l = (l', l_{n+1})$, $l' = (l_1, \ldots, l_n)$ обозначает множество функций $f(x, y)$ с компактными носителями в $\overline{E_{n+1}^+}$, имеющих l' непрерывных производных по переменной x', $2l_{n+1}$ производных по переменной y и таких, что функция $B_y^{l_{n+1}} f(x, y)$ непрерывна в $\overline{E_{n+1}^+}$.

На гиперплоскости $y = 0$ полупространства $\overline{E_{n+1}^+}$ можно определить аналогичным образом множество функций $C_0^\infty(E_n)$.

Положим $D_x^{l'} = D_{x_1}^{l_1} \ldots D_{x_n}^{l_n}$. Обозначим через $L_{p,k}(E_{n+1}^+)$ пространство функций, определенных на $\overline{E_{n+1}^+}$, для которых

$$\|f\|_{L_{p,k}(E_{n+1}^+)} \overset{\mathrm{def}}{=} \Big(\int\limits_{E_n} dx \int\limits_0^\infty |f(x, y)|^p y^k \, dy \Big)^{1/p} < \infty,$$

где k — положительное число, участвующее в определении оператора Бесселя.

На множестве функций $C_0^{(l)}(\overline{E_{n+1}^+})$ введем следующие нормы:

$$\|f\|_{w_{p,k}^l(E_{n+1}^+)} = \sum_{i=1}^n \|D_{x_i}^{l_i} f(x, y)\|_{L_{p,k}(E_{n+1}^+)} + \|B_y^{l_{n+1}} f(x, y)\|_{L_{p,k}(E_{n+1}^+)},$$
$$\|f\|_{W_{p,k}^l(E_{n+1}^+)} = \|f\|_{L_{p,k}(E_{n+1}^+)} + \|f\|_{w_{p,k}^l(E_{n+1}^+)}. \qquad (1)$$

Пусть число $m > 0$, причем $m = \overline{m} + \alpha$, где $\overline{m}$ — наибольшее целое число, меньшее m.

Говорят, что функция $f(x, y)$, определенная на $\overline{E^+_{n+1}}$, принадлежит классу Гёльдера $C^{l_i}(E^+_{n+1})$ по переменной x_i, $i = 1, \ldots, n+1$, где l_i нецелые, причем $l_{n+1} \in (2m, 2m+1)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, если

$$[f(x, y)]_{C^{l_i}(E^+_{n+1})} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{(x, y)\in E^+_{n+1} \\ h>0}} \frac{|\Delta_y(h) D^{\bar{l}_i}_{x_i} f(x, y)|}{h^{l_i-\bar{l}_i}} < \infty, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$[f(x, y)]_{C^{l_{n+1}}(E^+_{n+1})} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{(x, y)\in E^+_{n+1} \\ h>0}} \frac{|\Delta_y(h) B^{\bar{\rho}}_y f(x, y)|}{h^{l_{n+1}-2\bar{\rho}}} < \infty.$$

Здесь $\Delta_i^s(h)$ — s-я разделенная разность шага h по переменной x_i, $i = 1, \ldots, n+1$, $\rho = l_{n+1}/2$.

Для функций $\varphi(x) \in C_0^\infty(E_n)$ положим

$$[\varphi(x)]_{r_i, L_q(E_n)} = \left(\int_{E_n} dx \int_0^\infty \frac{|\Delta_i^2(h) D^{\bar{r}_i}_{x_i}\varphi(x)|^q}{h^{1+q(r_i-\bar{r}_i)}} dh\right)^{1/q},$$

$$\|\varphi\|_{b^r_q(E_n)} = \sum_{i=1}^n [\varphi(x)]_{r_i, L_q(E_n)}, \quad \|\varphi\|_{B^r_q(E_n)} = \|\varphi\|_{L_q(E_n)} + \|\varphi\|_{b^r_q(E_n)}. \qquad (2$$

Пространство $W^l_{p,k}(E^+_{n+1})$ определяется как замыкание $C_0^{(l)}(\overline{E^+_{n+1}})$ по норме (1), а $B_q{}^r(E_n)$ — как замыкание по норме (2).

Перейдем к формулировкам полученных результатов. Будем рассматривать оператор $Af = D^{\nu'}_x B^{\nu_{n+1}}_y f(x, y)$.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x, y) \in W^l_{p,k}(E^+_{n+1})$. *Пусть* $l_i > 0, \nu_i \geqslant 0$ — *целые числа такие, что*

$$\sigma_1 = 1 - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\nu_i}{l_i} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} + \frac{k+1}{2l_{n+1}}\right) > 0.$$

Тогда для любого $h > 0$ *оператор* A, *как оператор из* $W^l_{p,k}(E^+_{n+1})$ *в* $L_{q,k}(E^+_{n+1})$, $1 < p \leqslant q \leqslant \infty$, $k \neq 1, 3, \ldots, 2l_{n+1}-1$, *ограничен, т. е.*

$$\|D^{\nu'}_x B^{\nu_{n+1}}_y f(x, y)\|_{L_{q,k}(E^+_{n+1})} \leqslant C(h^{\sigma_1-1}\|f\|_{L_{p,k}(E^+_{n+1})} + h^{\sigma_1}\|f\|_{W^l_{p,k}(E^+_{n+1})}).$$

Имеет место следующая теорема вложения в $C^{l_i}(E^+_{n+1})$.

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x, y) \in W^l_{p,k}(E^+_{n+1})$, $1 < p \leqslant \infty$, $k \neq 1, 3, \ldots, 2l_{n+1}-1$. *Пусть* $l_i > 0$, $\nu_i \geqslant 0$ — *целые числа такие, что*

$$\sigma_2 = 1 - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\nu_i}{l_i} - \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} + \frac{k+1}{2l_{n+1}}\right) > 0.$$

Тогда для любого $h > 0$ $Af \in C^{r_i}(\overline{E^+_{n+1}})$, *где* r_i *нецелые,* $r_{n+1} \in (2m, 2m+1)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, *причем*

$$[Af]_{C^{r_i}(E^+_{n+1})} \leqslant C(h^{\sigma_2-r_i/l_i-1}\|f\|_{L_{p,k}(E^+_{n+1})} + h^{\sigma_2-r_i/l_i}\|f\|_{W^l_{p,k}(E^+_{n+1})}),$$
$$i = 1, \ldots, n,$$

$$[Af]_{C^{r_{n+1}}(E^+_{n+1})} \leqslant C(h^{\sigma_2-r_{n+1}/2l_{n+1}-1}\|f\|_{L_{p,k}(E^+_{n+1})} + h^{\sigma_2-r_{n+1}/2l_{n+1}}\|f\|_{W^l_{p,k}(E^+_{n+1})})$$

при $0 < r_i \leqslant \sigma_2 l_i$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < r_{n+1} \leqslant 2\sigma_2 l_{n+1}$.

При тех же условиях $Af(x, y) \in C(\overline{E^+_{n+1}})$, *причем для любого* $h > 0$

$$|Af|_{C(E^+_{n+1})} \leqslant C\left(h^{\sigma_2-1}\|f\|_{L_{p,k}(E^+_{n+1})} + h^{\sigma_2}\|f\|_{w^l_{p,k}(E^+_{n+1})}\right).$$

Обозначим теперь через $A_1 f = D_x^{\nu'} B_y^{\nu_{n+1}} f(x, y)|_{y=0}$ оператор сужения функций $D_x^{\nu'} B_y^{\nu_{n+1}} f(x, y)$ на гиперплоскость $y = 0$ (определение следа см. в работе [1]). Используя некоторые неравенства, доказанные в работе [2], удается получить следующую теорему, устанавливающую ограниченность оператора A_1.

Теорема 3. *Пусть функция* $f(x, y) \in W^l_{p,k}(E^+_{n+1})$. *Пусть* $l_i > 0$, $\nu_i \geqslant 0$ — *целые числа такие, что*

$$\sigma_3 = 1 - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\nu_i}{l_i} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{l_i} - \frac{k+1}{2pl_{n+1}} > 0.$$

Тогда для любого $h > 0$ *оператор* A_1, *как оператор из* $W^l_{p,k}(E^+_{n+1})$ *в* $B_q^r(E_n)$, $1 < p \leqslant q \leqslant \infty$, $k \neq 1, 3, \ldots, 2l_{n+1} - 1$, *ограничен, причем*

$$[A_1 f]_{r_i, L_q(E_n)} \leqslant C\left(h^{\sigma_3 - r_i/l_i - 1}\|f\|_{L_{p,k}(E^+_{n+1})} + h^{\sigma_3 - r_i/l_i}\|f\|_{w^l_{p,k}(E^+_{n+1})}\right),$$

где $0 < r_i \leqslant \sigma_0 l_i$, $i = 1, \ldots, n$.

При тех же условиях оператор A_1 *ограничен, как оператор из* $W^l_{p,k}(E^+_{n+1})$ в $L_q(E_n)$, т. е.

$$\|A_1 f\|_{L_q(E_n)} \leqslant C\left(h^{\sigma_3-1}\|f\|_{L_{p,k}(E^+_{n+1})} + h^{\sigma_3}\|f\|_{w^l_{p,k}(E^+_{n+1})}\right). \tag{3}$$

Если $1 < p < q < \infty$, *то неравенство* (3) *верно и при* $\sigma_3 = 0$.

Доказательство теорем 1—3 существенно опирается на некоторые факты из [3, 4].

В связи с теоремой 3 возникает вопрос о возможности ее обращения, т. е. построения ограниченного оператора продолжения с подпространства E_n. Существование такого оператора устанавливает

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(x) \in b_p^r(E_n)$, $1 < p < \infty$, $r_i = \sigma_4 l_i$, *причем*

$$\sigma_4 = 1 - \frac{\nu}{l_{n+1}} - \frac{k+1}{2pl_{n+1}} > 0.$$

Тогда существует ограниченный оператор продолжения $f(x, y) = A_2\varphi$, *как оператор из* $b_p^r(E_n)$ *в* $w^l_{p,k}(E^+_{n+1})$ *такой, что* $B_y^{\nu} f(x, y)|_{y=0} = \varphi(x)$, *где след понимается в смысле работы* (1). *При этом верно соответствующее неравенство между нормами*:

$$\|A_2\varphi\|_{w^l_{p,k}(E^+_{n+1})} \leqslant C\|\varphi\|_{b^r_p(E_n)}.$$

Для доказательства теорем 1—3 строилось интегральное представление для оператора $D_x^{\nu'} B_y^{\nu_{n+1}}$ типа представления работы [5], но приспособленное к нашему случаю, после чего дело сводилось к соответствующим интегральным оценкам. В теореме 4 продолжение строилось на основе интегрального представления работы [5], после чего доказывалось выполнение граничных условий и построенная функция оценивалась в соответствующем весовом классе.

Отметим, наконец, что верны соответствующие прямые и обратные теоремы вложения на подпространство $\tilde{x} = 0$, $\tilde{x} = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$, пространства $\overline{E^+_{n+1}}$.

Воронежский государственный
педагогический институт

Поступило
18 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Киприянов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 89, 130 (1967). [2] В. П. Ильин, В. А. Солонников, Там же, 66, 205 (1962). [3] Б. М. Левитан, УМН, 6, в. 2 (42), 102 (1951). [4] И. А. Киприянов, М. И. Ключанцев, Сибирск. матем. журн., 11, № 5, 1060 (1970). [5] В. П. Ильин, Там же, 8, № 3, 573 (1967).