

Ю. А. ПЫХ

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧИСЛАХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 4 X 1972)

1. Матрица $P = \|p_{ij}\|_{n^1}$ называется стохастической, если $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$,

$p_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Изучение характеристических чисел таких матриц представляет интерес в связи с важностью этих матриц для теории цепей Маркова. Первые исследования в этой области были выполнены В. И. Романовским ⁽¹⁾. Затем в работах Н. А. Дмитриева и Е. Б. Дынкина ⁽²⁾, а также Ф. И. Карпелевича ⁽³⁾ была решена поставленная в 1938 г. А. Н. Колмогоровым задача об определении области в круге $|\lambda| \leq 1$, состоящей из характеристических чисел всевозможных стохастических матриц n -го порядка. В 1949 г. Х. Р. Сулеймановой ⁽⁴⁾ изучался вопрос о построении стохастической матрицы, спектром которой является заданная совокупность вещественных чисел, принадлежащих сегменту $[-1; +1]$. К этому же кругу вопросов относится и настоящая заметка, в которой получены некоторые новые оценки для характеристических чисел стохастических матриц.

2. Пусть $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, 1\}$ — спектр матрицы P . Набор чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}\}$ назовем основной частью спектра матрицы P .

Все полученные ниже результаты опираются на следующую лемму.

Лемма. *Основная часть спектра произвольной стохастической матрицы P содержится в спектре матрицы $A = \|a_{ij}\| = \|p_{ij} + a_{ij}\|$ ($a_j, j = 1, 2, \dots, n$, любые, не обязательно действительные числа), которая кроме этого имеет еще одно характеристическое число $\lambda_n = 1 + \sum_{j=1}^n a_j$.*

Доказательство. Для того, чтобы убедиться в справедливости леммы, достаточно в определителе характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$ к произвольно выбранному столбцу прибавить все остальные, а затем вычесть какую-либо строку из остальных строк.

Используя эту лемму, нетрудно получить оценку основной части спектра матрицы P , более точную, чем вытекающая из теоремы Фробениуса. А именно, имеет место следующая

Теорема 1. *Характеристические числа основной части спектра стохастической матрицы P лежат в круге*

$$|\lambda| \leq 1 - \sum_{j=1}^n \min_{1 \leq i \leq n} p_{ij}. \quad (1)$$

Доказательство. Зададим числа $a_j, j = 1, 2, \dots, n$, в матрице $A = \|p_{ij} + a_j\|$ следующим образом: $a_j = -\min_{1 \leq i \leq n} p_{ij} + \alpha$, $j = 1, 2, \dots, n$. При $\alpha = 0$ матрица A неотрицательна ($A \geq 0$), т. е. $a_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, а при $\alpha > 0$ положительна ($A > 0$), $a_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Характери-

стическое число матрицы A

$$\lambda_n(\alpha) = 1 - \sum_{j=1}^n \min_{1 \leq i \leq n} p_{ij} + n\alpha. \quad (2)$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\lambda_n(0)$ не меньше модуля любого из характеристических чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}\}$, которые согласно лемме являются основной частью спектра матрицы P . Предположим, что это не так. Тогда, поскольку $A \geq 0$, по аналогу теоремы Фробениуса для разложимых матриц ((⁵), стр. 365), существует вещественное неотрицательное характеристическое число $\lambda_l = r$, $l \neq n$, такое, что $|\lambda_k| \leq r$, $k = 1, 2, \dots, n$. Согласно нашему предположению $\lambda_n(0) < r$. Из (2) ясно, что в этом случае найдется такое $\alpha^* > 0$, что $\lambda_n(\alpha^*) = r$. С другой стороны, при $\alpha > 0$ матрица $A > 0$ и, следовательно, неразложима, а это в свою очередь означает, что характеристическое число $\lambda_l = r$ должно быть не только вещественным, но и простым. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 2. *Вещественные части характеристических чисел основной части спектра матрицы P удовлетворяют неравенству*

$$-1 + \sum_{j=1}^n \min_{1 \leq i \leq n} p_{ij} \leq \operatorname{Re} \lambda_k \leq 1 - \sum_{j=1}^n \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} p_{ij}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3)$$

Доказательство. Оценка снизу вытекает из (1), поэтому докажем только справедливость оценки сверху. Для доказательства правой части неравенства (3) достаточно повторить доказательство теоремы 1, принимая во внимание, что при оценке вещественной части характеристических чисел выбор параметров a_j , $j = 1, 2, \dots, n$, матрицы A ограничен менее жесткими условиями неотрицательности только недиагональных элементов матрицы A и, следовательно, можно положить $a_j = -\min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} p_{ij}$,

$j = 1, 2, \dots, n$.

3. Полученные выше оценки можно с некоторыми изменениями распространить на произвольные вещественные матрицы, имеющие вещественное характеристическое число и соответствующий этому числу вещественный собственный вектор с ненулевыми координатами.

Теорема 3. *Если вещественная матрица $C = \|c_{ij}\|_n$ имеет вещественное характеристическое число $\mu_n = \rho$ и этому характеристическому числу соответствует вещественный собственный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, все координаты которого отличны от нуля, $x_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, то для остальных характеристических чисел $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}\}$ матрицы C справедливы следующие оценки:*

$$|\mu_k| \leq \rho - \sum_{j=1}^n \min_{1 \leq i \leq n} c_{ij} \frac{x_j}{x_i}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (4)$$

$$-\rho + \sum_{j=1}^n \min_{1 \leq i \leq n} c_{ij} \frac{x_j}{x_i} \leq \operatorname{Re} \mu_k \leq \rho - \sum_{j=1}^n \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} c_{ij} \frac{x_j}{x_i}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $B = \|b_{ij}\|_n$, подобную матрице C :

$$B = X^{-1}CX, \quad X = \operatorname{diag} \{x_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Характеристическому числу ρ матрицы B соответствует собственный вектор $(1, 1, \dots, 1)$. Применяя к матрице B доказательство леммы п. 2,

получаем, что одно из характеристических чисел матрицы $B^* = \|b_{ij}^*\| = \|b_{ij} + a_j\|$ равно $\rho^* = \rho + \sum_{j=1}^n a_j$, а остальные совпадают с соответствующими характеристическими числами матрицы $C \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}\}$. Выберем параметры a_j , $j = 1, 2, \dots, n$, так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$1) \ b_{ij}^* = b_{ij} + a_j \geq 0,$$

$$2) \ \rho^* = \rho + \sum_{j=1}^n a_j > 0,$$

и образуем матрицу $P = B^* / \rho^*$, которая, как очевидно, будет стохастической. Применяя к этой матрице теоремы 1 и 2 и возвращаясь к начальным обозначениям, получим оценки 4 и 5.

В заключение выражаю благодарность Р. А. Полуэктову и Г. С. Эпельману за обсуждение работы и ценные замечания.

Агрофизический научно-исследовательский институт
Ленинград

Поступило
2 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. И. Романовский, Дискретные цепи Маркова, 1948. ² Н. А. Дмитриев, Е. Б. Дынкин, ДАН, 49, 159 (1945); Изв. АН СССР, матем. сер., 10, 167 (1946). ³ Ф. И. Карпелевич, Изв. АН СССР, матем. сер., 15, 361 (1951). ⁴ Х. Р. Сулейманова, ДАН, 66, 343 (1949); Уч. зап. Московск. гос. пед. инст., сер. матем., 71, в. 1, 167 (1953). ⁵ Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., 1967.