Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 2

УДК 517.537 МАТЕМАТИКА

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, Н. И. НАГНИБИДА, Т. С. ШМАТА

ОБ ОДНОМ БАЗИСЕ ПРОСТРАНСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ В КОЛЬЦЕ ФУНКЦИЙ

Через $A(R_1, R_2)$ обозначим пространство всех однозначных и аналитических в кольце $K(0 \leqslant R_1 < |z| < R_2 \leqslant \infty)$ функций с регулярной топологией. В этой заметке находятся условия, при которых система

$$\{z^{kn}(\varphi_0(z), \ldots, \varphi_{n-1}(z))\}_{k=-\infty}^{\infty}, \tag{1}$$

где $\varphi_s(z) \in A(R_1, R_2)$ и n, $n \geqslant 1$,— фиксированное целое, образует в $A(R_1, R_2)$ квазистепенной базис*. Другими словами, мы находим условия, при которых оператор T, определенный на элементах естественного базиса $\{z^m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ соотношениями

$$Tz^{kn+s} = z^{kn}\varphi_s(z), \quad k = 0, \pm 1, \ldots; \quad 0 \leqslant s \leqslant n-1, \tag{2}$$

может быть расширен до линейного взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения (т. е. изоморфизма) пространства $A(R_1, R_2)$ на себя. Поэтому для дальнейшего напомним (2), что упомянутый оператор T может быть линейно и непрерывно расширен на все пространство $A(R_1, R_2)$ лишь в том случае, когда его матрицы

$$[t_{i,k}]_{i,k=-\infty}^{\infty} \left(\text{т. е. } Tz^k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} t_{i,k}z^i,\ k=0, \pm 1, \ldots\right)$$

удовлетворяют следующему условию: для всякой пары (ρ_1, ρ_2), $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$, существует пара (r_1, r_2), $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, и постоянная $C = C(\rho_1, \rho_2)$ такие, что $|t_{i,k}| \leqslant Cr^k / \rho^i$, $i, k = 0, \pm 1, \ldots$, где

$$r^k = \begin{cases} r_2^k, & k \geqslant 0, \\ r_1^k, & k < 0, \end{cases} \qquad \rho^i = \begin{cases} \rho_2^i, & i \geqslant 0, \\ \rho_1^i, & i < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Отметим, что аналогичный вопрос для пространства функций, аналитических в круге, в одном частном случае рассматривался в работе (3). Значительно позже он был решен для таких пространств в работе (4).

Оказывается, что нахождение условий базисности системы (1) в пространстве $A(R_1, R_2)$ может быть сведено к решению другой (интересной самой по себе) задаче. Именно, имеет место

Лемма. *Система* (1) *образует в* $A(R_1, R_2)$ *квазистепенной базис тогда и только тогда, когда определяемый соотношениями* (2) *оператор* T *может быть расширен до изоморфизма, перестановочного в* $A(R_1, R_2)$ *с оператором* U^n *умножения на функцию* z^n *(т. е.* $Uf(z) = zf(z)$*).*

Пусть (1) является квазистепенным базисом в $A(R_1, R_2)$, т. е. существует изоморфизм T такой, что

$$Tz^{kn+s} = z^{kn}\varphi_s(z), \quad k = 0, \pm 1, \ldots; \quad 0 \leqslant s \leqslant n-1,$$

* В дальнейшем базис считается квазистепенным в смысле работы (1) (см. также (5), стр. 376).

или $Tz^{kn+s} = U^{kn}\varphi_s(z)$. Тогда $U^nTz^{kn+s} = z^{(k+1)n}\varphi_s(z) = TU^nz^{kn+s}$ на базисных элементах. Ввиду непрерывности операторов U^n и T этих соотношений достаточно для перестановочности U^n и T в $A(R_1, R_2)$. Достаточность очевидна, так как, по предположению, определяемый соотношениями (2) оператор T является изоморфизмом $A(R_1, R_2)$, перестановочным с U^n, и поэтому система (1) образует квазистепенной базис.

Замечание 1. Оператор U^n, очевидно, также является изоморфизмом пространства $A(R_1, R_2)$, так как z^n не имеет нулей в кольце K.

Займемся сперва описанием всех линейных непрерывных операторов T в $A(R_1, R_2)$, перестановочных с U^n. Если

$$Tz^s=\varphi_s(z)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi_{in+l,s}\cdot z^{in+l},\quad 0\leqslant s\leqslant n-1, \tag{4}$$

то из соотношения $TU^{kn} = U^{kn}T$ следует, что все элементы матрицы оператора T полностью определяются лишь с помощью функций $\varphi_s(z)$, а именно:

$$t_{in+l,\, kn+s} = \varphi_{(i-k)n+l,\, s},\quad i, k = 0, \pm1, \ldots;\quad 0 \leqslant l,\ s \leqslant n-1.$$

Действительно, имеем

$$Tz^{kn+s}=TU^{kn}z^s=U^{kn}\varphi_s(z)=z^{kn}\varphi_s(z)=$$
$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi_{in+l,s}z^{(k+i)n+l}=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi_{(i-k)n+l,s}z^{in+l}.$$

Отсюда следует (4).

Кроме того, должно выполняться также соответствующее условие (3) непрерывности оператора T, которое, как нетрудно проверить, в данном случае равносильно тому, что функции $\varphi_s(z) \in A(R_1, R_2)$. Иными словами, поскольку область значений перестановочного с U^n оператора T принадлежит $A(R_1, R_2)$, он автоматически является непрерывным. В этом случае условие (3) с учетом (4) имеет вид

$$|\varphi_{(i-k)n+l,\, s}| \leqslant Cr^{kn+s}/\rho^{in+l},\quad i, k = 0, \pm1, \ldots;\quad 0 \leqslant s \leqslant n-1.$$

Полагая здесь $k = 0$ и учитывая произвольность ρ $(R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2)$, мы убеждаемся в том, что $\varphi_s(z) \in A(R_1, R_2)$. Наоборот, если $\varphi_s(z) \in A(R_1, R_2)$, то условие (3) выполняется при $r = \rho$, если только учесть оценки для коэффициентов Лорана этих функций.

Учитывая теперь (4), доказывается

Теорема 1. *Оператор T является линейным и непрерывным оператором в $A(R_1, R_2)$, перестановочным с U^n, лишь в том и только в том случае, когда он имеет вид*

$$T=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\varphi_{m,s}U^{m-s}A_s, \tag{5}$$

где $A_sf(z) = A_s\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} f_i\cdot z^i = \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} f_{in+s}z^{in+s}$, $f(z) \in A(R_1, R_2)$, *и его характеристические функции* $\varphi_s(z) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\varphi_{m,s}z^m$ *принадлежат пространству* $A(R_1, R_2)$.

В самом деле, пусть T — линейный и непрерывный в $A(R_1, R_2)$ оператор, перестановочный с U^n, т. е. его матрица имеет вид (4) и $\varphi_s(z) \in$

$\in A(R_1, R_2)$. Тогда для любой $f(z) \in A(R_1, R_2)$ имеем

$$Tf(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} f_{kn+s} Tz^{kn+s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} f_{kn+s} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi_{(i-k)n+l,s} z^{in+l} =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-1} \varphi_{in+l,s} z^{in+l-s} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{kn+s} z^{kn+s} \right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \varphi_{m,s} U^{m-s} A_s f(z).$$

Итак, необходимость доказана, а достаточность очевидна.

На основании этой теоремы уже можно дать описание полной группы *изоморфизмов пространства* $A(R_1, R_2)$, перестановочных с U^n. С этой целью введем в рассмотрение функции

$$\Phi_{l,s}(z) = z^{-l} A_l \varphi_s(z), \quad l, s = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{6}$$

Заметим далее, что если линейный непрерывный оператор существует, то его матрица также характеризуется соответствующими соотношениями (4), он имеет вид типа (5) и его характеристические функции $\psi_s(s)$ принадлежат $A(R_1, R_2)$. Кроме того, условия $TT^{-1} = E$ и $T^{-1}T = E$ (E — оператор тождественного преобразования) можно записать в эквивалентных им матричных формах:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \varphi_{in+l,p} \psi_{(k-j)n+p,s} = \delta_{l,s}, \qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \psi_{jn+l,p} \varphi_{(k-j)n+p,s} = \delta_{l,s}, \tag{7}$$

$l, s = 0, 1, \ldots, n-1$; $k = 0, \pm 1, \ldots$; $\delta_{l,s}$ — символ Кронекера.

Соотношения же (7), очевидно, равносильны следующим:

$$\sum_{p=0}^{n-1} \Phi_{l,p}(z) \cdot \Psi_{p,s}(z) = \sum_{p=0}^{n-1} \Psi_{l,p} \Phi_{p,s}(z) = \delta_{l,s}, \tag{8}$$

где $\Psi_{p,s} = z^{-p} A_p \psi_s(z)$.

Следовательно, если T — изоморфизм $A(R_1, R_2)$, перестановочный с оператором U^n, то, как видно из (8), должно также выполняться условие

$$\det \| \Phi_{l,p}(z) \|_{l,p}^{n-1} \neq 0 \quad \text{при } R_1 < \|z\| < R_2. \tag{9}$$

Проводя аналогичные рассуждения в обратном порядке, мы убеждаемся в том, что верна

Теорема 2. *Для того чтобы оператор T был изоморфизмом пространства $A(R_1, R_2)$, перестановочным с U^n, необходимо и достаточно, чтобы он имел вид* (5), *его характеристические функции принадлежали $A(R_1, R_2)$ и выполнялось условие* (9).

Теперь мы уже можем полностью охарактеризовать те условия, при которых система (1) образует базис в $A(R_1, R_2)$.

Теорема 3. *Для того чтобы система* (1) *образовала квазистепенной базис пространства $A(R_1, R_2)$, необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\det \| z^{-q} A_q \varphi_s(z) \|_{q,s}^{n-1} = 0$$

не имела в кольце $K(R_1 < |z| < R_2)$ нулей.

Замечание 2. Условия базисности (1) получены нами в предположении, что $\varphi_s(z) = Tz^s$, $0 \leqslant s \leqslant n-1$, где T — искомый изоморфизм. Легко усмотреть, что теорема 3 имеет место и в том случае, если требовать выполнения соотношений $\varphi_s(z) = Tz^{m+s}$, $0 \leqslant s \leqslant n-1$, при некотором целом m.

Пример. Пусть $n=2$, $\varphi_0(z) = \exp z$ и $\varphi_1(z) = z\exp(-z)$. В этом случае

$$A_0 f(z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2}, \quad A_1 f(z) = \frac{f(z)-f(-z)}{2}$$

для любой функции $f(z) \in A(R_1, R_2)$ и условие $\det \|\ldots\| \neq 0$ равносильно тому, что $e^{2z} + e^{-2z} \neq 0$ в кольце. Корнями уравнения $e^{2z} + e^{-2z} = 0$ являются точки $z = \pi i/4 + l\pi i/2$, $l = 0, \pm 1, \ldots$ Так как центр кольца находится в начале координат, то точки $\pi i/4 + l\pi i/2$ и $\pi/4 + l\pi/4$ могут принадлежать ему лишь одновременно.

Следовательно, система $\{z^k \exp[(-1)^k z]\}_{k=-\infty}^{\infty}$ образует в $A(R_1, R_2)$ квазистепенной базис тогда и только тогда, когда кольцо $K(R_1 < |z| < R_2)$ не содержит ни одной из точек $\pi/4 + l\pi/2$, $l = 0, \pm 1, \ldots$ (см. [3]).

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Черновицкий государственный университет

Поступило
20 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Хапланов, ДАН, 80, № 2, 177 (1951). [2] К. М. Фишман, ДАН, 127, № 1 (1959). [3] И. И. Ибрагимов, Изв. АН СССР, сер. матем., № 5—6, 553 (1939). [4] Н. И. Нагнибида, Сборн. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков, в. 13, 63 (1971). [5] И. И. Ибрагимов, Методы интерполяции функций и некоторые их применения, «Наука», 1971.