

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

А. А. КИРИЛЛОВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 4 I 1973)

Классическая теорема Г. Вейля утверждает, что все неприводимые представления унитарной группы $U(n)$ реализуются в тензорах, удовлетворяющих определенным условиям симметрии. Мы покажем, что в бесконечномерном случае имеет место та же теорема, если бесконечномерным аналогом групп $U(n)$ считать группу U_0 всех унитарных операторов, сравнимых с единицей по модулю компактных. Аналогичные утверждения справедливы для бесконечномерной ортогональной и симплектической группы. Формулировки этих утверждений подсказываются методом орбит и были высказаны в качестве гипотез в курсе лекций автора по теории представлений бесконечномерных групп ЛИН (МГУ, 1966/1970 гг.).

1. Пусть L — бесконечномерное сепарабельное комплексное гильбертово пространство, U — группа всех унитарных операторов в L , снабженная топологией нормы, $U(n)$ — подгруппа операторов, оставляющих на месте все базисные векторы, начиная с $(n+1)$ -го, $U(\infty)$ — объединение $U(n)$ по всем n и, наконец, U_0 — замыкание $U(\infty)$ в U . Ясно, что U_0 состоит из всех унитарных операторов вида $1 + a$, где a — компактный оператор.

Мы будем называть тензорами типа (k, l) над L элементы гильбертова тензорного произведения

$$T^{k,l} = \underbrace{L \otimes \dots \otimes L}_k \otimes \underbrace{\bar{L} \otimes \dots \otimes \bar{L}}_l,$$

k сомножителей l сомножителей

где $\bar{L}$ — пространство, сопряженное к L . Группа U действует в $T^{k,l}$ по формуле

$$\begin{aligned} \rho^{k,l}(u) \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_l = \\ = u \xi_1 \otimes \dots \otimes u \xi_k \otimes \bar{u} \eta_1 \otimes \dots \otimes \bar{u} \eta_l. \end{aligned}$$

Кроме того, в $T^{k,l}$ определено представление A группы перестановок $S(k) \times S(l)$:

$$\begin{aligned} A(s, \sigma) \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_l = \\ = \xi_{s(1)} \otimes \dots \otimes \xi_{s(k)} \otimes \eta_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \eta_{\sigma(l)}. \end{aligned}$$

Лемма 1. *Всякий оператор в $T^{k,l}$, перестановочный с операторами $\rho^{k,l}(u)$, $u \in U(\infty)$, является линейной комбинацией операторов $A(s, \sigma)$, $s \in S(k)$, $\sigma \in S(l)$.*

Отметим, что в конечномерном случае это утверждение неверно.

Обозначим через $\hat{S}(k)$ совокупность классов эквивалентности неприводимых представлений группы $S(k)$ и через $\hat{S}$ — объединение $\hat{S}(k)$ по всем k . Из леммы 1 стандартными рассуждениями (см., например, (2)) выводится

Теорема 1. *Существует семейство унитарных представлений ρ_π , $\pi \in \hat{S}$, группы U , обладающих свойствами:*

1) представление $\rho^{k,l} \times A$ группы $U \times S(k) \times S(l)$ в $T^{k,l}$ допускает

$$\rho^{k,l} \times A = \sum_{\pi_1 \in \widehat{S(k)}, \pi_2 \in \widehat{S(l)}} \rho_{\pi_1} \otimes \bar{\rho}_{\pi_2} \times \pi_1 \times \pi_2,$$

где $\bar{\rho}$ означает представление, комплексно сопряженное с ρ ;

2) ограничения представлений $\rho_{\pi_1} \otimes \bar{\rho}_{\pi_2}$ на $U(\infty)$ неприводимы и попарно неэквивалентны для всех $\pi_1, \pi_2 \in \widehat{S}$;

3) имеет место формула

$$\rho_{\pi_1} \otimes \rho_{\pi_2} = \sum_{\pi \in \widehat{S(k+l)}} c_{\pi_1, \pi_2}^{\pi} \cdot \rho_{\pi}, \quad \pi_1 \in \widehat{S(k)}, \quad \pi_2 \in \widehat{S(l)},$$

где коэффициент c_{π_1, π_2}^{π} равен кратности вхождения $\pi_1 \times \pi_2$ в разложение ограничения π на $S(k) \times S(l) \subset S(k+l)$.

4) в пространстве представления ρ_{π} существует естественный аналог базиса Гельфанда — Цетлина ⁽³⁾; векторы этого базиса нумеруются наборами $\{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots$, целых неотрицательных чисел, невозрастающих по каждому индексу, причем лишь конечное число элементов набора отлично от нуля.

2. Основной результат настоящей заметки —

Теорема 2. Все унитарные неприводимые представления группы U_0 имеют вид $\rho_{\pi_1} \otimes \rho_{\pi_2}$, $\pi_1, \pi_2 \in \widehat{S}$.

В сочетании с теоремой 1 это утверждение позволяет полностью вычислить кольцо Гротендика Γ для категории унитарных представлений группы U_0 . А именно, справедлива

Теорема 3. Кольцо Γ изоморфно кольцу целочисленных многочленов от счетного набора переменных. В качестве образующих можно взять классы представлений, реализующихся в кососимметрических тензорах типа $(k, 0)$ и $(0, k)$.

Доказательство теоремы 2 основано на следующем факте.

Лемма 2. Пусть ρ — унитарное представление группы $U(\infty)$ в пространстве H , не содержащем инвариантных векторов. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\xi \in H$ существует такое натуральное n и такая вероятностная мера μ на множестве $W_{h, \varepsilon} = \{u \in U(h), \|1 - u\| \leq \varepsilon\}$, что $\|\rho(\mu)\xi\| \leq \geq (1 - \varepsilon^2/6) \|\xi\|$, где $\rho(\mu) = \int \rho(u) d\mu(u)$.

Отсюда без труда выводится

Лемма 3. Пусть $V(n)$ — централизатор $U(n)$ в U_0 . В любом унитарном представлении U_0 есть вектор, инвариантный относительно $V(n)$ при достаточно большом n .

Вывод теоремы 2 из леммы 3 использует явный вид сферических функций на группе U_0 относительно подгруппы $V(n)$.

3. Пусть теперь L — сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство над полем R вещественных чисел или над телом H кватернионов. По аналогии с группами U , $U(n)$, $U(\infty)$, U_0 определяются в вещественном случае ортогональные группы O , $O(n)$, $O(\infty)$, O_0 , а в кватернионном случае — симплектические группы Sp , $Sp(n)$, $Sp(\infty)$, Sp_0 . Связную компоненту единицы в группе O_0 мы обозначим SO_0 .

Теорема 4. Все унитарные неприводимые представления групп SO_0 и Sp_0 исчерпываются представлениями типа ρ_{π} , $\pi \in \widehat{S}$, и реализуются в тензорах над исходным пространством L . Представления ρ_{π} и $\bar{\rho}_{\pi}$ эквивалентны. Для тензорного произведения ρ_{π_1} и ρ_{π_2} справедливо утверждение 3) теоремы 1.

4. Сравним полученные результаты с тем, что дают в этом случае эвристические правила метода орбит (см. ⁽²⁾, § 15).

Алгеброй Ли рассматриваемой группы G ($=U_0$, SO_0 или Sp_0) является пространство $\mathfrak{g}$ компактных эрмитовых операторов в L . Двойственное про-

пространство $\mathfrak{g}^*$ отождествляется с пространством эрмитовых ядерных операторов, а действие G в $\mathfrak{g}^*$ имеет вид

$$x \rightarrow gxg^{-1}, \quad x \in \mathfrak{g}^*, \quad g \in G.$$

Условие целочисленности означает, что все собственные значения оператора x — целые числа. Так как x — ядерный оператор, это возможно, лишь когда x имеет конечный ранг. Соответствующие орбиты нумеруются в ортогональном и симплектическом случаях конечными неупорядоченными наборами натуральных чисел, а в унитарном случае — парами таких наборов. Ясно, что между этими орбитами и построенными выше представлениями существует естественное взаимно однозначное соответствие. Заметим, однако, что это соответствие носит иной характер, чем в конечномерном случае (ср. ⁽⁴⁾, § 3).

Следует также сказать, что рассмотрение вместо U_0, SO_0, Sp_0 больших групп U, SO, Sp (или меньших групп $U(\infty), SO(\infty), Sp(\infty)$ с топологией индуктивного предела) приводит к резкому усложнению структуры множества орбит. Это согласуется с тем фактом, что указанные группы не принадлежат типу 1 в смысле Неймана и аналог теоремы Г. Вейля для них не имеет места *.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. Вейль, Классические группы, их варианты и представления, М., 1947.
² А. А. Кириллов, Элементы теории представлений, «Наука», 1972. ³ И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца, М., 1958. ⁴ А. А. Кириллов, Функц. анализ, 2, № 2, 40 (1968).
⁵ I. E. Segal, Proc. Am. Math. Soc. 8, № 1, 197 (1957).

* При жестком дополнительном условии положительности дифференциала И. Сигал показал в ⁽⁵⁾, что все неприводимые унитарные представления группы U имеют вид $\rho_\pi, \pi \in \hat{S}$.