

УДК 517.91

МАТЕМАТИКА

К. С. СИБИРСКИЙ, И. А. ЧИРКОВА

К ТЕОРИИ РАЗРЫВНЫХ ДИСПЕРСНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 25 XII 1972)

1°. Во многих прикладных задачах встречаются системы с толчками, т. е. с разрывами первого рода у решений. В работах ⁽¹⁻³⁾ изучены системы с толчками в заданные моменты времени. В последнее время появился целый ряд работ, посвященных исследованию систем, в которых толчки происходят при достижении движущейся точкой заданного множества в фазовом пространстве. Т. Павлидис ⁽⁴⁾ рассматривает такие системы в произвольных метрических пространствах, называя их разрывными динамическими системами (р.д.с.). Строгое определение и основные свойства р.д.с. с толчками на заданном множестве фазового пространства даны в ⁽⁵⁾. Развитию математической теории импульсных систем посвящены также работы ^(6, 7).

Во всех указанных выше работах речь идет о системах с единственностью. В то же время теперь уже имеется хорошо разработанная теория непрерывных дисперсных динамических систем ⁽⁸⁻¹⁵⁾, обобщающая теорию дифференциальных уравнений без предположения единственности.

В данной работе рассматриваются некоторые вопросы общей теории разрывных дисперсных динамических систем (р.д.д.с.) с толчками на заданном множестве фазового пространства. При выполнении некоторых условий на р.д.д.с. удалось перенести многие основные понятия и результаты топологической теории динамических систем.

2°. Поскольку аксиоматика дисперсных динамических систем (д.д.с.) в работах разных авторов неодинакова, приведем определение д.д.с. и ее движений.

Пусть R — метрическое пространство с метрикой ρ , I^+ — множество всех неотрицательных чисел, а $S(p, \delta) = \{q \in R: \rho(q, p) < \delta\}$. Для любых подмножеств $A \subseteq R$ и $B \subseteq R$ положим

$$\beta(A, B) = \sup \{\rho(p, B): p \in A\}, \quad \alpha(A, B) = \max \{\beta(A, B), \beta(B, A)\}.$$

Пусть f — отображение, ставящее в соответствие каждой точке $p \in R$ и каждому элементу $t \in I^+$ непустой компакт $f(p, t) \subseteq R$. Положим

$$f(A, K) = \bigcup_{p \in A, t \in K} f(p, t), \quad A \subseteq R, \quad K \subseteq I^+.$$

Совокупность $[R, I^+, f]$ называется д.д.с., если выполнены следующие условия:

- 1) $f(p, 0) = p$ для любой точки $p \in R$ (аксиома тождества).
- 2) $f(f(p, t_1), t_2) = f(p, t_1 + t_2)$ для любых $p \in R$, $t_1, t_2 \in I^+$ (аксиома полугруппы).
- 3) Каковы бы ни были точка $p \in R$, числа $\epsilon > 0$ и $t_0 \in I^+$, существует такое число $\delta > 0$, что для всех точек $q \in S(p, \delta)$ и всех $t \in I^+$, удовлетворяющих условию $|t - t_0| < \delta$, имеет место неравенство $\beta(f(q, t), f(p, t_0)) < \epsilon$ (аксиома непрерывности).

Иногда аксиома 3 заменяется более сильным условием

- 3') Для любой точки $p \in R$, чисел $\epsilon > 0$ и $t_0 \in I^+$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех точек $q \in S(p, \delta)$ и всех $t \in I^+$, удовлетворяющих

условию $|t - t_0| < \delta$, имеет место неравенство $\alpha(f(q, t), f(p, t_0)) < \varepsilon$ (аксиома непрерывности).

Однозначное непрерывное отображение $q = \varphi_p(t)$ действительной полупрямой I^+ в пространство R называется движением, выходящим из точки p , если выполнены условия

- 1) $\varphi_p(0) = p$;
- 2) $\varphi_p(t_2) \in f(\varphi_p(t_1), t_2 - t_1)$ при $0 \leq t_1 < t_2$.

Множество $\varphi_p(I^+) = \{\varphi_p(t) : t \in I^+\}$ называется траекторией движения $\varphi_p(t)$. Множество всех движений $\varphi_p: I^+ \rightarrow R$, выходящих из точки p , обозначим через $\Phi(p)$. Тогда $f(p, I^+) = \bigcup_{\varphi_p \in \Phi(p)} \varphi_p(I^+)$.

3°. Пусть Ω — некоторое открытое множество пространства R , а Γ — его граница. Для каждой точки $p \in \Omega$ и каждого движения φ_p д.д.с. $f(p, t)$ положим

$$\tau(\varphi_p) = \sup \{t : \varphi_p([0, t]) \subseteq \Omega\}.$$

Совокупность всех точек $p \in \Omega$, для которых $\tau(\varphi_p) < +\infty$ хотя бы при одном $\varphi_p \in \Phi(p)$, обозначим через Ω^* . Если $p \in \Omega^*$, то обозначим

$$\Phi^*(p) = \{\varphi_p : \tau(\varphi_p) < +\infty\}, \quad \Phi^* = \bigcup_{p \in \Omega^*} \Phi^*(p).$$

Пусть Q — подмножество Ω , F — отображение (вообще говоря, многозначное) границы Γ на Q , а $\varphi_p \in \Phi^*$. Определим функцию π равенством $\pi(\varphi_p) = F(\varphi_p(\tau(\varphi_p)))$.

Допустим, что существует такое число $a > 0$, что $\tau(\varphi_p) \geq a$, каковы бы ни были точка $p \in Q$ и движение $\varphi_p \in \Phi(p)$.

Пусть $p_0 = p$, $p_1 \in \pi(\varphi_{p_0})$, а $\varphi_{p_1} \in \Phi(p_1)$. Если $\varphi_{p_1} \in \Phi^*$, то рассмотрим произвольную точку $p_2 \in \pi(\varphi_{p_1})$ и движение $\varphi_{p_2} \in \Phi(p_2)$. Продолжая этот процесс выбора точек и движений, получим некоторую конечную или бесконечную последовательность движений $\{\varphi_{p_n}\}$, $n = 0, 1, \dots, N \leq +\infty$,

так что $\sum_{i=0}^N \tau(\varphi_{p_i}) = +\infty$. Для всякого $t > 0$ найдется такое минимальное

$$\text{целое } k \geq 0, \text{ что } t < \sum_{i=0}^k \tau(\varphi_{p_i}).$$

Определим разрывное движение ψ_p , выходящее из точки p , полагая

$$\psi_p(t) = \varphi_{p_k} \left(t - \sum_{i=0}^{k-1} \tau(\varphi_{p_i}) \right), \quad \sum_{i=0}^{-1} = 0.$$

Введем обозначения:

$$\Psi(p) = \{\psi_p\}; \quad n(\psi_p) = \sup \{k : \exists p_k\}, \quad 0 \leq n(\psi_p) \leq +\infty.$$

Очевидно, если $m = n(\psi_p) < +\infty$, то $\tau(\varphi_{p_m}) = +\infty$, а если $m = 0$, то $\psi_p \in \Phi(p)$. Множество $\psi_p(I^+) = \{\psi_p(t) : t \in I^+\}$ называется траекторией разрывного движения ψ_p .

Разрывной дисперсной динамической системой будем называть функцию

$$h(p, t) = \{\psi_p(t) : \psi_p \in \Psi(p)\},$$

определенную при всех $p \in \Omega$, $t \in I^+$.

При любых $A \subseteq \Omega$, $K \subseteq I^+$ положим $h(A, K) = \bigcup_{r \in A, t \in K} h(r, t)$.

Множество $h(p, I^+)$ будем называть воронкой р.д.с. с вершиной в точке p , а его замыкание в Ω обозначим через Σ_p .

4°. Пусть задана многозначная функция σp , определенная на некотором множестве $A \subseteq R$ со значениями в R . Скажем, что σp непрерывна в точке $p \in A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, какова

бы ни была точка $q \in S(p, \delta) \cap A$, выполняется неравенство

$$\alpha(\sigma q, \sigma p) < \varepsilon. \quad (1)$$

Функцию σp назовем непрерывной, если она непрерывна в каждой точке ее области определения. Скажем, что функция σp равномерно непрерывна, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, каковы бы ни были точки q и r из области ее определения с $\rho(q, r) < \delta$, имеет место неравенство (1).

Для любого $p \in \Omega^*$ обозначим

$$\begin{aligned} \pi p &\equiv \pi^1 p = \bigcup_{\varphi_p \in \Phi^*(p)} \pi(\varphi_p), \quad \pi^0 p = p, \\ \pi^n p &= \pi(\pi^{n-1} p) = \bigcup_{q \in \pi^{n-1} p} \pi q, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Легко видеть, что если функция πp непрерывна и обладает компактными в себе значениями, а множество $Q \equiv \Omega^*$, то при всяком натуральном n функция $\pi^n p$ непрерывна и обладает компактными в себе значениями.

Будем говорить, что граница Γ обладает свойством притяжения, если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что если $\rho(p, \Gamma) < \delta$, $p \in \Omega$, то для любого движения $\varphi_p \in \Phi(p)$ число $\tau(\varphi_p) < \varepsilon$ и при всех $t \in [0, \tau(\varphi_p)]$

$$\rho(\varphi_p(t), \varphi_p(\tau(\varphi_p))) < \varepsilon.$$

Скажем, что выполнены условия W_1 , если функция π непрерывна, множество Ω^* открыто и для д.д.с. $f(p, t)$ выполнена аксиома непрерывности.

Будем говорить, что выполнены условия W_2 , если функция F равномерно непрерывна, функция π непрерывна и обладает компактными значениями, множество $Q \equiv \Omega^*$, граница Γ обладает свойством притяжения и для д.д.с. $f(p, t)$ выполнена аксиома непрерывности.

Теорема 1. Если выполнены условия W_2 , то для точки $p \in \Omega$ и произвольных чисел $\varepsilon > 0$ и $T \in I^+$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой точки $q \in S(p, \delta)$ и произвольного движения $\psi_p \in \Psi(q)$ существует такое движение $\psi_p \in \Psi(p)$, что для всякого $t^* \in [0, T]$ найдется момент времени $t_0 \in [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon]$, для которого

$$\rho(\psi_q(t^*), \psi_p(t_0)) < \varepsilon. \quad (2)$$

Теорема 2. Если выполнены условия W_2 , то для точки $p \in \Omega$ и любых чисел $\varepsilon > 0$ и $T \in I^+$ найдется такое число $\delta > 0$, что, каковы бы ни были движение $\psi_p \in \Psi(p)$ и точка $q \in S(p, \delta)$, существует такое движение $\psi_q \in \Psi(q)$, что для всякого $t_0 \in [0, T]$ найдется момент времени $t^* \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, удовлетворяющий неравенству (2).

5°. Множество $A \equiv \Omega$ назовем инвариантным, если $h(A, t) \equiv A$ при любом $t \geq 0$. Нетрудно показать, что любая воронка р.д.д.с. является инвариантным множеством.

Теорема 3. При выполнении условий W_1 замыкание инвариантного множества $A \equiv \Omega$ инвариантно.

Следствие 1. При выполнении условий W_1 замыкание любой воронки р.д.д.с. является инвариантным множеством.

Точку q назовем динамически предельной для точки p , если для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ найдется такой момент времени $t > T$, что $\rho(q, h(p, t)) < \varepsilon$. Множество всех динамически предельных точек точки p обозначим через D_p и назовем динамически предельным множеством точки p . Легко видеть, что динамически предельное множество замкнуто.

Теорема 4. При выполнении условий W_1 динамически предельное множество инвариантно.

Точку p назовем устойчивой по Пуассону, если для любых $\varepsilon > 0$, q и $r \in h(p, I^+)$ существует такое $T = T(\varepsilon, q, r)$, что

$$\rho(q, h(r, [0, T])) < \varepsilon. \quad (3)$$

Теорема 5. Для того чтобы точка p была устойчива по Пуассону, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1) $D_p = \Sigma_p$; 2) $D_p = D_r$ для любой точки $r \in h(p, I^+)$.

Непустое замкнутое в Ω инвариантное множество Σ назовем минимальным, если оно не содержит собственного замкнутого в Ω инвариантного подмножества. В дальнейшем под замкнутым множеством понимается множество замкнутое в Ω , а под замыканием множества подразумевается его замыкание в Ω .

Теорема 6. Если выполнены условия W_1 , то множество $\Sigma \subseteq \Omega$ будет минимальным тогда и только тогда, когда для любой точки $p \in \Sigma$ имеет место равенство $\Sigma_p = \Sigma$.

Теорема 7. Если выполнены условия W_1 , то все точки минимального множества Σ устойчивы по Пуассону.

6°. Точка p называется почти рекуррентной, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и произвольной точки $q \in h(p, I^+)$ существует такое число $T = T(\varepsilon, q)$, что для всякой точки $r \in h(p, I^+)$ выполнено условие (3).

Теорема 8. Если точка $p \in \Omega^*$ почти рекуррентна, а множество Ω^* открыто, то найдется разрывное движение ψ_p , для которого $n(\psi_p) = \infty$.

Точка p называется рекуррентной, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $T(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $q, r \in h(p, I^+)$ выполнено неравенство (3).

Теорема 9. Если воронка $h(p, I^+)$ компактна в R , то из почти рекуррентности точки p следует ее рекуррентность.

Следующие теоремы являются обобщением известных теорем М. В. Бebutова и Дж. Д. Биркгофа (16) на случай р.д.с. В их доказательстве используются теоремы 1 и 2.

Теорема 10. Если выполнены условия W_2 , то в замыкании воронки рекуррентной (почти рекуррентной) точки все точки рекуррентны (почти рекуррентны).

Теорема 11. Если выполнены условия W_2 , то замыкание воронки почти рекуррентной точки является минимальным множеством.

Теорема 12. Если выполнены условия W_2 , то всякая точка, воронка которой принадлежит минимальному компактному в R множеству, рекуррентна.

Институт математики с Вычислительным центром
Академии наук МССР

Поступило
21 XI 1972

Кишиневский политехнический институт
им. С. Лазо

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Д. Мильман, А. Д. Мышкис, Сибирск. матем. журн., 1, № 2 (1960).
² А. Д. Мышкис, А. М. Самойленко, Матем. сборн., 74, № 2 (1967). ³ А. Халанай, Д. Векслер, Качественная теория импульсных систем, М., 1971. ⁴ Т. Pavlidis, Inform. and Control, № 9 (1966). ⁵ В. Ф. Рожко, Матем. исследования, Кишинев, 4, № 3 (1969); 5, № 1 и № 2 (1970); Дифференциальные уравнения, 8, № 11 (1972). ⁶ В. С. Калигин, Там же, 6, № 12 (1970); 7, № 3 (1971). ⁷ Н. А. Перестюк, Тр. сем. по матем. физике и нелинейн. колебаниям, Инст. матем. АН УССР, в. 3 (1969). ⁸ Е. А. Барбашин, ДАН, 41, № 4 (1943). ⁹ Е. А. Барбашин, Уч. зап. Московск. унив., 135, № 2 (1948). ¹⁰ Б. М. Будаков, Там же, 155, № 5 (1952). ¹¹ М. И. Минкевич, ДАН, 59, № 6 и 60, № 3 (1948). ¹² И. У. Бронштейн, ДАН, 144, № 5 (1962); 151, № 1 (1963). ¹³ Н. К. Чебан, Матем. исследования, Кишинев, 2, № 2 (1967); 3, № 1 (1968). ¹⁴ М. С. Изман, Дифференциальные уравнения, 5, № 7 (1969). ¹⁵ G. P. Szegö, G. Treccani, Semigrupp di Trasformazioni Multivoche, Lecture Notes in Mathematics, 1969, p. 101. ¹⁶ К. С. Сибирский, Введение в топологическую динамику, Кишинев, 1970.