

С. Н. СИУКАЕВ

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком И. Н. Векун 19 XII 1972)

В этой статье рассматриваются априорные оценки решений квазилинейных уравнений 2-го порядка вида

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L}(x, u, u_x) = \mathcal{L}_0(x, u, u_x); \quad (1)$$

$\mathcal{L}, \mathcal{L}_0$ — заданные функции переменных x, u, u_x ; $u_x = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n)$ — градиент зависимой переменной; $u = u(x)$; $x = (x_1, \dots, x_n)$. Предполагается, что $\mathcal{L}, \mathcal{L}_0$ определены для всех x в некотором открытом связном множестве Ω пространства E_n и произвольных u, p , измеримы и подчиняются условиям

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}| &\leq \mu |p|^{\alpha-1} + a |u|^{\alpha-1} + d, \\ |\mathcal{L}_0| &\leq b |p|^{\alpha-1} + c |u|^{\alpha-1} + e, \\ \mathcal{L}_p &\geq |p|^\alpha - c |u|^\alpha - f; \end{aligned} \quad (2)$$

здесь μ — положительная постоянная, $\alpha > 1$;

$$a, b, c, d, e, f \quad (*)$$

— измеримые функции от x . Если считать их принадлежащими пространствам L_p , то в такой постановке уравнение (1) было изучено ранее в работе (3). Эти результаты опираются на теоремы вложения Соболева и в терминах пространств L_p неулучшаемы. Однако известны уравнения, для которых справедливы результаты Серрина при более худших коэффициентах (*). Эта работа и посвящена изучению уравнения (1) при более слабых ограничениях на функции (*).

Обобщенным решением уравнения (1) будем называть функцию $u(x)$, принадлежащую $W_{\alpha}^1(D)$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_D (\mathcal{L}\eta_x + \mathcal{L}_0\eta) dx = 0 \quad (3)$$

при любой $\eta(x) \in \dot{W}_{\alpha}^1(D)$; D — подобласть Ω .

Покажем, что при соответствующих предположениях о функциях (*) обобщенное решение уравнения (1) ограничено. Возможны три случая:

1) $\alpha < n$; полагаем коэффициенты (*) принадлежащими соответствующим пространствам со смешанной нормой (определение этих пространств см. в работах (4, 5)):

$$\begin{aligned} a, d &\in L(q_1, q_2), \quad s/q_1 + (n-s)/q_2 = \alpha - 1; \\ b &\in L(q_1, q_2), \quad s/q_1 + (n-s)/q_2 = 1 - \varepsilon; \\ c, e, f &\in L(q_1, q_2), \quad s/q_1 + (n-s)/q_2 = \alpha - \varepsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

2) $\alpha = n$;

$$\begin{aligned} a, d &\in L(q_1, q_2), \quad s/q_1 + (n-s)/q_2 = n-1-\varepsilon; \\ b &\in L(q_1, q_2), \quad s/q_1 + (n-s)/q_2 = 1-\varepsilon; \\ c, e, f &\in L(q_1, q_2), \quad s/q_1 + (n-s)/q_2 = n-\varepsilon. \end{aligned} \quad (5)$$

3) $\alpha > n$; для этого случая решения уравнения (1) ограничены и непрерывны по Гёльдеру, что вытекает из следующего утверждения.

Лемма (Морри). Пусть $\varphi(x)$ — функция, принадлежащая W_{α}^1 в шаре $|x| < r$. Тогда φ непрерывна по Гёльдеру и имеет место оценка

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x - y|^{1-n/\alpha} \|\varphi(x)\|_{\alpha, r};$$

C — постоянная, зависящая от α и n .

Поэтому остается рассмотреть два первых случая.

Приведем без вывода основную лемму, на которую будут опираться доказательства.

Лемма 1. Если $f(x) \in \dot{W}_{\alpha}^1(E_n)$ и $n/\alpha - 1 = (n-s)/p_2 + s/p_1$, то $f(x) \in L(p_1, p_2)(E_n)$ и выполняется неравенство

$$\|f\|_{L(p_1, p_2)} \leq C\|f\|_{L_{\alpha}}, \quad C = C(\alpha, n).$$

Перейдем теперь к изложению основных результатов.

Теорема 1. Пусть в некотором шаре $S(2R) \subset \Omega$ определено решение уравнения (1). Предположим, что $\alpha < n$ и что условия (2) и (4) выполняются. Тогда имеет место оценка

$$\text{vrai max}_R |u| \leq CR^{-n/\alpha} (\|u\|_{\alpha, rR} + kR^{n/\alpha}),$$

где

$$C = C(\alpha, n, \varepsilon; \mu\|a\|, R^{\varepsilon}\|b\|, R^{\varepsilon}\|c\|), \quad k = (\|d\| + R^{\varepsilon}\|e\|)^{1/(\alpha-1)} + (R^{\varepsilon}\|f\|)^{1/\alpha}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $R = 1$. Положим $\bar{u} = |u| + k$. Тогда неравенства (2) примут вид

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}| &\leq \mu|p|^{\alpha-1} + \bar{a}|\bar{u}|^{\alpha-1}, \\ |\mathcal{L}_0| &\leq b|p|^{\alpha-1} + \bar{c}|\bar{u}|^{\alpha-1}, \\ \mathcal{L}_p &\geq |p|^{\alpha} - \bar{c}|\bar{u}|^{\alpha}, \end{aligned} \quad (2')$$

где $\bar{a} = a + k^{1-\alpha}d$, $\bar{c} = c + k^{1-\alpha}e + k^{-\alpha}f$.

Выберем теперь определенным образом функцию η в (3). Для фиксированных $q \geq 1$ и $l > k$ определяем функции

$$F(\bar{u}) = \begin{cases} \bar{u}^q, & \text{если } k \leq \bar{u} \leq l, \\ ql^{q-1}\bar{u} - (q-1)l^q, & \text{если } l < \bar{u}, \end{cases}$$

и $G(u) = \text{sign } u \cdot \{F(\bar{u})F'(\bar{u})^{\alpha-1} - q^{\alpha-1}k^{\beta}\}$, где q и β связаны соотношением $\alpha q = \alpha + \beta - 1$.

Пусть теперь $\psi(x)$ — неотрицательная гладкая функция в $S(2)$, равная нулю на границе, и положим

$$\eta(x) = \psi^{\alpha}G(u).$$

То, что $\eta(x)$ возможна для (3), легко доказывается (см. (3)). Подставляя теперь эту функцию в выражение $\mathcal{L}\eta + \mathcal{L}_0\eta$ и делая необходимые вы-

кладки, будем иметь

$$\begin{aligned} \|\psi v_x\|_a^\alpha &\leq \alpha \mu \int |\psi_x v| \cdot |\psi v_x|^{\alpha-1} dx + \alpha q^{\alpha-1} \int \bar{a} |\psi_x v| \cdot (\psi v)^{\alpha-1} dx + \\ &+ \int b \psi v |\psi v_x|^{\alpha-1} dx + (1 + \beta) q^{\alpha-1} \int \bar{c} (\psi v)^\alpha dx, \end{aligned} \quad (6)$$

где $v(x) = F(\bar{u})$.

Оценим теперь интегралы в правой части (6), используя неравенство Гёльдера и лемму 1:

$$\begin{aligned} \int |\psi_x v| \cdot |\psi v_x|^{\alpha-1} dx &\leq \|\psi_x v\|_a \|\psi v_x\|_a^{\alpha-1}, \\ \int \bar{a} |\psi_x v| \cdot (\psi v)^{\alpha-1} dx &\leq \|\bar{a}\|_{L(q_1, q_2)} \|\psi_x v\|_a \|\psi v\|_{L(p_1, p_2)}^{\alpha-1} \leq \\ &\leq C \|\psi_x v\|_a \|\psi v\|_a^{\alpha-1} \leq C (\|\psi_x v\|_a^\alpha + \|\psi v_x\|_a \|\psi v_x\|_a^{\alpha-1}), \\ \int b \psi v |\psi v_x|^{\alpha-1} dx &= \int b (\psi v)^\varepsilon (\psi v)^{1-\varepsilon} |\psi v_x|^{\alpha-1} dx \leq \\ &\leq \|b\|_{L(q_1, q_2)} \|\psi v\|_a^\varepsilon \|\psi v\|_{L(p_1, p_2)}^{1-\varepsilon} \|\psi v_x\|_a^{\alpha-1} \leq C \|\psi v\|_a^\varepsilon (\|\psi_x v\|_a^{1-\varepsilon} \|\psi v_x\|_a^{\alpha-1} + \|\psi v_x\|_a^{\alpha-\varepsilon}), \\ \int \bar{c} (\psi v)^\alpha dx &= \int \bar{c} (\psi v)^\varepsilon (\psi v)^{\alpha-\varepsilon} dx \leq \\ &\leq \|\bar{c}\|_{L(q_1, q_2)} \|\psi v\|_a^\varepsilon \|\psi v\|_{L(p_1, p_2)}^{\alpha-\varepsilon} \leq C \|\psi v\|_a^\varepsilon (\|\psi_x v\|_a^{\alpha-\varepsilon} + \|\psi v_x\|_a^{\alpha-\varepsilon}). \end{aligned}$$

Подставив эти оценки в (6), после преобразования получим

$$\|\bar{u}\|_{\kappa p, h'} \leq [C(p/\alpha)^{\alpha/\varepsilon} (h - h')^{-1}]^{\alpha/p} \|\bar{u}\|_{p, h},$$

где $p = \alpha q = \alpha + \beta - 1$, $\kappa = \alpha^* / \alpha$, $\alpha^* = \alpha n / (n - \alpha)$, $h' < h \leq 2$.

Следуя далее методу Морри, получим

$$\|\bar{u}\|_{p_{v+1}, h_{v+1}} \leq C^{\frac{\Sigma 1}{\kappa^v}} K^{\frac{\Sigma v}{\kappa^v}} \|\bar{u}\|_{\alpha, 2} \leq C \|\bar{u}\|_{\alpha, 2}, \quad K = 2\kappa^{\alpha/\varepsilon}.$$

Полагая $v \rightarrow \infty$ и замечая, что $\text{vrai max } \bar{u} \leq \lim_1 \|\bar{u}\|_{p_v, h_v}$, имеем

$$\text{vrai max}_1 \bar{u} \leq C \|\bar{u}\|_{\alpha, 2}.$$

Вспоминая, что $\bar{u} = |u| + k$, имеем окончательно

$$\text{vrai max}_1 |u| \leq C (\|u\|_{\alpha, 2} + k).$$

Общий случай $R \neq 1$ легко получается из единичного.

Ограниченность обобщенного решения в случае $\alpha = n$ и условий (2), (5) доказывается аналогично.

Приведем теперь 2 теоремы, показывающие, что при наших предположениях о коэффициентах остаются справедливыми неравенство Гарнака и принцип максимума. Для доказательства достаточно воспользоваться методом Морри и леммой 1.

Теорема 2. Пусть u — неотрицательное обобщенное решение уравнения (1) в некотором шаре $S(3R) \subset \Omega$. Положим, что $\alpha < n$ (соответственно $\alpha = n$) и что условия (2) и (4) (соответственно (2) и (5)), выполняются.

Тогда имеет место оценка

$$\text{vrai max } u \leq C (\text{vrai min } u + k) \text{ в } S(R),$$

где постоянные C и k определяются, как в теореме 1.

Теорема 3. Пусть в области $D \subset \Omega$ задано решение и уравнения (1). Полагаем, что для любого ε существует окрестность границы такая, что $u \leq M + \varepsilon$. Положим также, что $\alpha < n$ (соответственно $\alpha = n$) и что условия (2) и (4) (соответственно (2) и (5)) выполняются.

Тогда существует постоянная D_0 , зависящая только от вида уравнения (1) и такая, что, если $|D| < D_0$, то

$$\forall \text{rai} \max_D u \leq M + Ck,$$

где

$$C = C(\alpha; n, \varepsilon; |D|^{\varepsilon/n} - \|b\|, |D|^{\varepsilon/n} \|C\|);$$

$$k = (|D|^{\varepsilon/n} \|e\|)^{1/(\alpha-1)} + (|D|^{\varepsilon/n} \|f\|)^{1/\alpha}.$$

Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова
Орджоникидзе

Поступило
11 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. ² О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, «Наука», 1964. ³ J. Serrin, Acta math., III, 3—4, 247 (1964). ⁴ А. Х. Гудиев, ДАН, 147, № 4, 764 (1962). ⁵ А. Х. Гудиев, Сибирск. матем. журн., 6, № 4 (1965).