Доклады Академии наук СССР
1974. Том. 214, № 1

УДК 550.344.5 **ГЕОФИЗИКА**

Член-корреспондент АН СССР А. С. АЛЕКСЕЕВ, Б. Г. МИХАЙЛЕНКО

О ЗАДАЧЕ ЛЭМБА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В настоящее время в связи с усложнением практических задач сейсмологии и сейсморазведки происходит совершенствование теоретических моделей реальных сред. Появилась необходимость рассматривать неоднородные среды, содержащие волноводы, переходные и экранирующие слои, анализ которых требует развития методов решения задач динамической теории упругости. Новые возможности количественного анализа волновых полей появляются при комбинировании конечно-разностных методов математики с аналитическими методами в ряде многомерных задач теории распространения волн, допускающих разделение переменных.

2. В цилиндрической системе координат r, φ, z рассмотрим полупространство $z=0$, параметры Ляме λ и μ и плотность ρ в котором суть произвольные функции координаты z. Вектор смещения $\mathbf{U}(r, z, t)=U_r(r, z, t)\mathbf{r}_1+U_z(r, z, t)\mathbf{e}_1$, $0\leqslant r<\infty$, $z\geqslant 0$, $t\geqslant 0$, определяется из системы уравнений динамической теории упругости

$$(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{U}-\mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{U}+\mathrm{div}\,\mathbf{U}\,\mathrm{grad}\,\lambda+2(\mathrm{grad}\,\mu\cdot E)=\rho\partial^2\mathbf{U}/\partial t^2, \quad (1)$$

где E — тензор деформации;

из начальных данных

$$\mathbf{U}(r, z, 0)=\mathbf{U}_t(r, z, 0)=0 \quad (2)$$

и граничных условий

$$\sigma_z(r, 0, t)=-f(t)\delta(r)/r, \quad \tau_{rz}(r, 0, t)=0; \quad (3)$$

здесь σ_r и τ_{rz} — нормальное и касательное напряжения, $\delta(r)$ — функция Дирака, $f(t)$ — закон изменения сосредоточенного источника во времени. Отделяя переменную r, решение задачи запишем в виде

$$U_r=\int_0^\infty S(z, k, t)J_1(kr)\,dk, \quad U_z=\int_0^\infty R(z, k, t)J_0(k, r)\,dk. \quad (4)$$

Как известно, решение (4) для кусочно-непрерывных λ, μ и ρ является в зависимости от дифференциальных свойств функции $f(t)$ либо классическим, либо обобщенным в смысле С. Л. Соболева.

Для определения функций $S(z, k, t)$ и $R(z, k, t)$ получаем граничную задачу

$$\partial^2\mathbf{G}/\partial z^2+A(z, k)\,\partial\mathbf{G}/\partial z+B(z, k)\mathbf{G}=C(z)\,\partial\mathbf{G}/\partial t^2, \quad (5)$$

$$\mathbf{G}(0, t, k)=\mathbf{G}_t(0, t, k)=0, \quad (6)$$

$$\partial\mathbf{G}/\partial z+D(z, k)\mathbf{G}=\varepsilon \quad \text{при} \quad z=0, \quad (7)$$

где $\mathbf{G}(z, t, k)$ — вектор с компонентами $S(z, k, t)$ и $R(z, k, t)$, A, B, C, D — известные матрицы, ε — вектор, зависящий от функции $f(t)$.

3. Задача (5)—(7) может быть эффективно решена конечно-разностными методами для достаточно густой сетки значений параметра k, являющегося переменной интегрирования в интегралах (4). В зависимости от величины параметра k целесообразно применять различные конечно-разностные схемы, аппроксимирующие задачу (5)—(7). Применялась неявная пятиточечная разностная схема в пространстве сеточных переменных $z_m=m\Delta z$, $t_j=j\Delta t$ с порядком аппроксимации $o(\Delta z^2, \Delta t)$. Систему разностных уравнений, аппроксимирующих задачу (5)—(7), в этом случае можно записать в виде

$$a_m\mathbf{G}_{m+1}-b_m\mathbf{G}_m+C_m\mathbf{G}_{m-1}=-\mathbf{F}_m, \quad m=1, 2, \ldots, M-2, \quad (8)$$

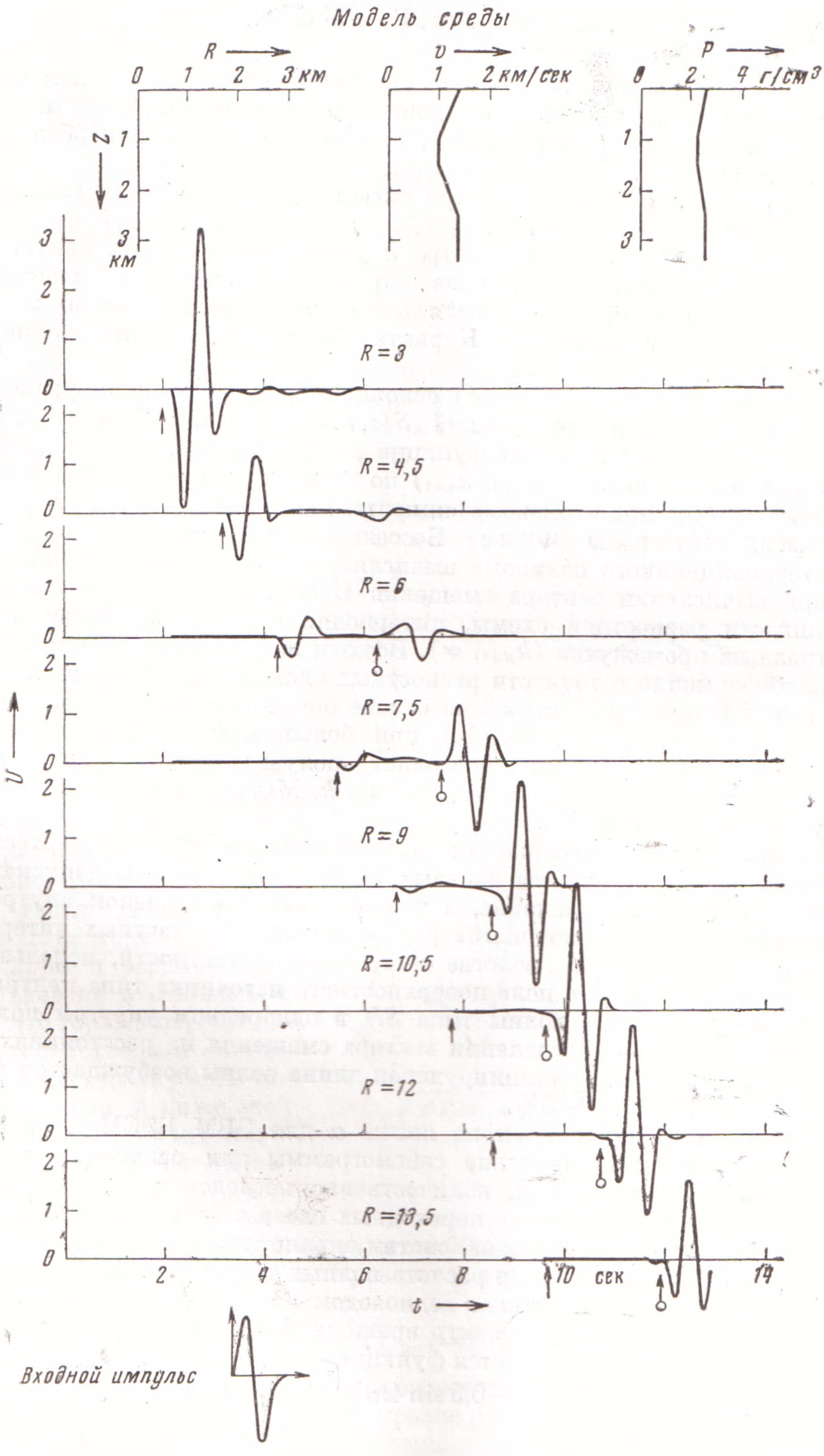

Рис. 1. Примеры теоретических сейсмограмм для случая приповерхностного волновода. U – вектор смещения среды, $Z=0$, стрелкой отмечено значение S^*, стрелкой с кружком – $S_{\text{реф}}$, R – в километрах

$$a_0\mathbf{G}_1+b_0\mathbf{G}_0=-\mathbf{F}_0, \qquad (9)$$

где $\mathbf{G}_m=\begin{matrix} S_m^{j+1} \\ R_m^{j+1} \end{matrix}$; a_m, b_m, c_m — матрицы; $\mathbf{F}_m$ — вектор.

Полученная система разностных уравнений решалась методом матричной факторизации, при этом вводилось дополнительное граничное условие на правом конце $\mathbf{G}_{N-1}|_{z>z(t)}=0$, которое следует из гиперболичности уравнения (1).

Метод является устойчивым при известных ограничениях (см., например, ([1])) на матрицы a_m, b_m, c_m.

При малых значениях параметра k удобно использовать явную пятиточечную разностную схему типа «крест» с порядком аппроксимации $o(\Delta z^2, \Delta t^2)$. Критерий устойчивости для такой схемы при малых значениях k совпадает с критерием Куранта — Неймана для гиперболических уравнений ([2]).

4. Вычисление интегралов (4) осложняется из-за осциллирующего характера подынтегральных функций $S(z, k, t)$ и $R(z, k, t)$ при фиксированных значениях z и t. Эти функции интерполировались квадратичной параболой на интервалах (k_{n-1}, k_{n+1}) по трем их значениям в точках k_{n-1}, k_n, k_{n+1} ($k_{-1}=0$), при этом коэффициенты параболы искались по формуле Лагранжа. Интегралы Фурье — Бесселя на промежутках (k_{n-1}, k_{n+1}) от интерполяционного полинома вычислялись точно. Основные погрешности при вычислении вектора смещения $\mathbf{U}(r, z, t)$ возникают вследствие погрешности разностной схемы, интерполяции и отбрасывания остатка интеграла на промежутке (k_{N+1}, ∞). Все эти погрешности оцениваются на основе информации о точности разностных схем, о погрешностях интерполяции коэффициентов, а также на основе оценок экспоненциального убывания величин $S_m^j(k_n)$ и $R_m^j(k_n)$ при больших k_n. Знакопеременность подынтегральных функций позволяет получить достаточно сильные оценки отброшенной части интегралов по k. Мы не приводим эти оценки ввиду их громоздкости.

Результативные погрешности метода оцениваются путем тестовых просчетов некоторого класса частных задач типа (1)—(3), допускающих точное аналитическое решение, а также с помощью оценок внутренней сходимости при дроблении шагов разностных схем и частных интервалов интегрирования по k. В качестве теста было, в частности, использовано точное решение задачи о поле поверхностного источника типа центра вращения, возбуждающего волны типа SH в однородном упругом полупространстве. Ошибка в определении вектора смещения на расстояниях, превышающих 10—15λ (λ — доминирующая длина волны возбуждается источником), не превышала 2—3%.

5. Программа, написанная на языке α для ЭВМ БЭСМ-6, позволяет получать полные теоретические сейсмограммы для различных моделей неоднородных упругих сред, количественно исследовать законы распространения волн в присутствие переходных слоев с большими градиентами упругих параметров, волноводов, систем экранирующих слоев и т. д.

На рис. 1 приведен пример расчета полных теоретических сейсмограмм для среды с приповерхностным волноводом. В качестве источника колебаний взят источник типа центр вращения, зависимость интенсивности которого от времени определяется функцией

$$f(t)=\begin{cases} C(\sin 2\pi t-0{,}5\sin 4\pi t) & 0\leqslant t\leqslant 1 \text{ сек.}, \\ 0, & t<0, \quad t>1 \text{ сек.} \end{cases}$$

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
20 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. К. Годунов, В. С. Рябенький, Введение в теорию разностных схем, М., 1962. [2] Р. Д. Рихтмайер, Разностные методы решения краевых задач, М., 1960.