Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 2

УДК 512.25/26+519.3:330.115

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Б. Л. ЛИТВАК

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

(Представлено академиком А. А. Вороновым 7 XII 1972)

Одним из эффективных путей решения задач оптимизации в условиях большой размерности является использование специфики конкретных задач. Этот путь является тем более оправданным, если удается выделить специфику, присущую достаточно широкому классу задач и позволяющую вместе с тем существенно упростить решение. В данной работе рассматривается специальный класс задач оптимизации объектов, к которым, в частности, относятся:

1) объекты, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных эллиптического типа (уравнениями Лапласа, Пуассона и некоторыми другими);
2) некоторые сети (например, электрические цепи постоянного тока);
3) экономические балансовые модели и модели обмена;
4) объекты, поведение которых описывается управляемым марковским процессом.

Задачи оптимизации указанных объектов, совершенно различных по физической природе, можно объединить благодаря специальной структуре знаков элементов матрицы, используемой при описании всех данных объектов. Эта специфика заключается в следующем: каждая строка и каждый столбец матрицы содержат не более одного положительного элемента, остальные элементы неположительны. Подобные матрицы будем называть т.в.-матрицами (матрицами требуемого вида) ([1, 2]).

1. Пусть имеется объект, описываемый следующим дифференциальным уравнением в частных производных эллиптического типа:

$$L(u) = au_{xx} + bu_{yy} + cu_x + du_y + eu = f \quad \text{в} \quad R,$$

где R — двумерная область; a, b, c, d, e — функция координат x и y; $-ab < 0$.

Нетрудно показать, что запись данного уравнения в конечных разностях при использовании квадратной сетки с достаточно малым шагом приводит к системе линейных алгебраических уравнений, матрица которой является т.в.-матрицей. Учет граничных условий 1-го и 2-го рода не изменит специфику знаков элементов получаемой матрицы ([3]). Знаковая структура матрицы сохранится и в том случае, если сократить ее размерность, выразив часть переменных через управляемые переменные (при условии, что решение существует).

Задача оптимизации для данных объектов заключается в выборе граничных условий таким образом, чтобы решение уравнения давало оптимум некоторому критерию качества. Варьироваться при оптимизации могут также некоторые параметры самого уравнения, например, функция стока f в уравнении Пуассона. При линейной целевой функции и ограничениях на переменные типа $0 \leqslant u \leqslant u_{\text{пр}}$, $f \geqslant 0$ или $f \leqslant f_{\text{пр}}$ задача оптимизации сводится к специальной задаче линейного программирования:

$$CX \to \max, \quad AX + X^0 = B, \quad X \geqslant 0, \quad X^0 \geqslant 0, \tag{1}$$

где A — т.в.-матрица; $B \geqslant 0$; $X = [x_j]$ — вектор переменных, определяющих искомые переменные u, f; $X^0 = [x_i^0]$ — вектор дополнительных переменных.

В качестве примера подобной задачи может быть названа задача оптимизации режима нефтяного пласта.

2. Описание любой линейной электрической цепи постоянного тока также приводит к т.в.-матрице. Физически это понятно из эквивалентности электрической цепи уравнению Пуассона, но нетрудно показать и математически, например, получив матрицу собственных и взаимных проводимостей узлов электрической цепи из уравнений Кирхгофа, записанных в матричной форме ([4]). Аналогично задачам, рассмотренным в п. 1, задачи оптимизации в электрических цепях сводятся к виду (1), если имеется возможность варьировать источники тока f.

В более общем смысле данные задачи можно рассматривать как задачи определения оптимальных интенсивностей источников и стоков в сетях, в которых потоки распределяются единственным образом в соответствии с критерием минимума потери мощности.

3. В балансовых экономических моделях используются матрицы межотраслевых связей затраты — выпуск. Эти матрицы по своей структуре также могут быть отнесены к т.в.-матрицам. Задача оптимизации заключается в выборе объемов продукции отраслей и может быть сведена к задаче (1) ([5], [6]).

В моделях обмена используется т.в.-матрица $G=E-P$, где E — единичная матрица, P — стохастическая матрица. Матрица $E-P$ используется также во многих вероятностных моделях.

4. Большое число прикладных задач оптимизации динамических объектов с вероятностными характеристиками формулируется в виде задачи оптимального управления марковским процессом с доходами. Задача оптимизации управляемого марковского процесса (задача марковского программирования) заключается в выборе стратегий, которые приносят максимальный доход за все время процесса. В случае управления бесконечным во времени однородным марковским процессом с переоценкой ([7]) задача марковского программирования сводится к задаче линейного программирования, матрица которой состоит из серии т.в.-матриц. Для таких же процессов, но без переоценки, матрица соответствующей задачи линейного программирования, кроме серии т.в.-матриц, содержит еще одно условие специального вида ([8]). Алгоритмы решения в обоих случаях остаются идентичными. Запишем задачу для первого случая:

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\in K_j} c_j^k x_j^k \to \max, \quad \sum_{k\in K_j} \overset{k}{a}_{ii} x_i^k + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\sum_{k\in K_j} \overset{k}{a}_{ij} x_j^k + x_i^0 = b_i,$$

$$i=1,\ldots,N, \quad x_j^k \geqslant 0, \quad x_i^0 \geqslant 0, \tag{2}$$

где $a_{ij}^k \leqslant 0$, $j\neq i$, $b_i \geqslant 0$.

Матрицы, состоящие из нескольких т.в.-матриц, используются также в ряде других прикладных задач. Подобные матрицы возникают, например, в обобщенной модели Леонтьева, когда каждый продукт может производиться не одним, а несколькими технологическими процессами.

5. Рассмотрим теперь алгоритмы решения указанных задач. Некоторые конечные алгоритмы решения задачи (1) в условиях большой размерности были предложены в ([9]). Для решения задач (1), (2) могут быть предложены также простые итерационные процедуры, являющиеся обобщением на задачи линейного программирования итерационных методов решения систем алгебраических уравнений. Например, в случае использования метода последовательных приближений итерационный процесс выделения оптимального базиса задачи (1) примет вид

$$\lambda_j(p+1) = \frac{1}{a_{jj}}\Big[c_j - \sum_{\substack{i\in S\\ i\neq j}} a_{ij}\lambda_i(p)\Big], \quad j=1,\ldots,N, \tag{3}$$

где c_j — компоненты вектора C; a_{ij} — компоненты матрицы A, $a_{ij} \leqslant 0$, $i \neq j$; S — множество индексов положительных переменных $\lambda_i(p)$; $\lambda_i(0) = 0$.

Как видно из (3), предлагаемое обобщение сводится к тому, что если при решении систем линейных алгебраических уравнений суммирование в итерационной формуле проводится по всем i, то для решения рассматриваемой задачи линейного программирования достаточно проводить суммирование только положительных переменных. При остановке процесса (3) будут получены двойственные оценки λ_i оптимального плана:

$$\lambda_i = \lambda_i(p) > 0, \quad i \in S^*; \quad \lambda_i = 0, \quad i \notin S^*;$$

базисными переменными в оптимальной точке будут переменные x_j, $j \in S^*$, и переменные x_i^0 с индексами $i \notin S^*$ (S^* — множество индексов положительных переменных $\lambda_i(p)$, полученных на последнем шаге процедуры).

Условия сходимости процесса будут аналогичны соответствующим условиям для систем линейных алгебраических уравнений. Скорость сходимости процедуры будет не ниже, чем скорость сходимости метода последовательных приближений при решении системы

$$\sum_{i \in S^*} a_{ij}\lambda_i = c_j, \quad j \in S^*.$$

Это следует из того, что в правой части процедуры (3) не учитываются компоненты $a_{ij}\lambda_i(p)$ для $\lambda_i(p) < 0$, вызывающие не приближение, а отдаление от решения (значения $\lambda_i(p)$ монотонно возрастают в процессе решения, начиная от $\lambda_i(0) = 0$).

Заметим, что несмотря на значительные преимущества итерационных методов перед конечными при решении задач линейного программирования большой размерности использование итерационных схем ограничивается в общем случае крайне медленной скоростью сходимости известных итерационных методов решения задач линейного программирования (например, методов, связанных с использованием бесконечных итерационных процедур решения матричных игр). В данном же случае удается использовать хорошо отработанные итерационные процедуры.

6. При решении практических задач зачастую оказывается достаточно выделить «субоптимальный» базис, который, как следует из (3), может быть получен следующим образом:

$$x_j > 0, \quad x_i^0 = 0, \quad i = j, \quad \text{если} \quad \lambda_j^{\text{пр}}(p) > 0;$$

$$x_j = 0, \quad x_i^0 > 0, \quad i = j, \quad \text{если} \quad \lambda_j^{\text{пр}}(p) \leqslant 0;$$

где $\lambda_j^{\text{пр}}(p)$ можно определить, например, из формулы

$$\lambda_j^{\text{пр}}(p) = \frac{1}{a_{jj}} \left(c_j - \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \frac{a_{ij} c_i}{a_{ii}} \right).$$

Для матриц со значительным диагональным преобладанием ($a_{ii} \gg a_{ij}$) «субоптимальный» базис обычно совпадает с оптимальным. Это имеет место, например, в задачах оптимизации нефтедобычи.

Итерационные процедуры решения задачи (1) могут быть построены и путем обобщения других методов решения систем линейных алгебраических уравнений, предполагающих монотонное возрастание вектора $\Lambda(p)$ в процессе решения. Например, в случае использования метода Зейделя процедура примет вид

$$\lambda_j(p+1) = \frac{1}{a} \left[c_j - \sum_{\substack{i \in S \\ i < j}} a_{ij}\lambda_i(p) + \sum_{\substack{i \in S \\ i > j}} a_{ij}\lambda_i(p) \right], \quad j = 1, \ldots, N.$$

7. Предложенные итерационные процедуры могут быть обобщены также на решение задач линейного программирования, в которых матрица ограничений содержит несколько т.в.-матриц. Итерационный процесс решения задачи (2) примет вид

$$\lambda_j(p+1) = \frac{1}{a_{jj}^l}\Big[c_j^l - \sum_{\substack{i\in S_1\\ i\neq j}} a_{ij}^l \lambda_i(p)\Big], \quad j\in S_1, \tag{4}$$

где a_{jj}^l, a_{ij}^l — компоненты столбца A_j^l, имеющего наименьшую отрицательную оценку $\delta_j^k(p) = \sum_{i=1}^{N} a_{ij}^k \lambda_i(p) - c_j^k$ из всех $k\in K_j$ для данного j; S_1 — множество индексов j, для которых имеются отрицательные оценки $\delta_i^k(p)$, $\lambda_i(0)=0$. Вычисление оценок $\delta_i^k(p)$ можно производить не на каждом шаге решения системы (4).

Как видно из формулы (4), в данном случае определение векторов, входящих в базис, будет происходить непосредственно в процессе решения системы (4). При достижении решения системы (4) будет получен и оптимальный базис. В конечных же алгоритмах решения задач линейного программирования требуется, вообще говоря, получать решение системы при определении каждого входящего в базис вектора.

8. Задача (1) является частным случаем задачи (2). Для обоснования алгоритма решения задачи (2) требуется доказать, что при выполнении условий сходимости предлагаемая процедура сходится после всех замен строк системы (4) к точному решению. Для этого достаточно убедиться в монотонном возрастании вектора $\Lambda(p)$ на каждом шаге итерационного процесса *.

Теорема 1. *Для монотонного возрастания вектора $\Lambda(p)$ на шагах итерационного процесса* (4) *достаточно выбрать исходную точку $\Lambda(0)$ таким образом, чтобы удовлетворялись условия*

$$-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} a_{ij}^l \lambda_i(0) + a_{jj}^l \lambda_j(0) - c_j^l \leqslant 0, \quad j\in S_1.$$

Кроме того, следует обосновать процедуру определения неограниченности целевой функции.

Теорема 2. *Целевая функция задачи* (2) *является неограниченной на рассматриваемом множестве, если на некотором шаге итерационного процесса* (4) *появляется элемент $\delta_j^k(p) < 0$ для столбца матрицы ограничений, имеющего элемент $a_{jj}^k \leqslant 0$.*

В заключение выражаю искреннюю признательность проф. М. В. Меерову за постоянное внимание и обсуждение данной работы.

Московский институт нефтехимической
и газовой промышленности
им. И. М. Губкина

Поступило
15 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Л. Литвак, IV Всесоюзн. совещ. по автоматическому управлению (техническая кибернетика), кн. 1, М., 1968. [2] М. В. Мееров, Б. Л. Литвак, ДАН, 187, № 5, 1009 (1969). [3] В. Вазов, Дж. Форсайт, Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, М., 1963. [4] Н. Г. Максимович, Линейные электрические цепи и их преобразования, М.— Л., 1961. [5] С. Гасс, Линейное программирование, М., 1961. [6] Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн, Задачи и методы линейного программирования, М., 1964. [7] Р. А. Ховард, Динамическое программирование и марковские процессы, М., 1964. [8] Ф. Вольф, Дж. Данциг, Кибернетический сборн. (нов. сер.), № 4, 86 (1967). [9] М. В. Мееров, Б. Л. Литвак, Автоматика и телемеханика, № 3, 143 (1970).

* Под «монотонным возрастанием» в данном случае понимается то, что на каждом шаге процедуры хотя бы одна компонента вектора $\Lambda(p)$ возрастает, а все остальные компоненты не убывают.