Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 1

УДК 517.948:513.88

МАТЕМАТИКА

В. И. ВАЙНЕРМАН, Ю. М. ВУВУНИКЯН

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЛОКАЛЬНО-ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 2 IV 1973)

Мы предполагаем получить здесь необходимые и достаточные условия существования фундаментальной функции у дифференциального оператора

$$P\equiv\sum_{k=0}^{l}A_k\frac{d^k}{dt^k},$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_l$ — замкнутые линейные операторы в локально-выпуклом пространстве X с мультинормой $\mathfrak{P}$.

Снабдим пересечение Y областей определения операторов $A_0, A_1, \ldots, A_l$ топологией, определяемой мультинормой

$$Q=\left\{q=p+\sum_{k=0}^{l}p\circ A_k\;\middle|\;p\in\mathfrak{P}\right\}.$$

Под фундаментальной функцией оператора P мы будем понимать $L(X, Y)$-значную обобщенную функцию T с носителем на $R_+=[0, +\infty)$ (т. е. $T\in K'_{R_+}(L(X, Y))$), удовлетворяющую следующим соотношениям:

$$(PT)(\varphi)=\varphi(0)\cdot I, \qquad (1)$$

$$\varphi\in K; \quad k=0, 1, \ldots, l.$$

$$A_k\cdot T(\varphi)\supset T(\varphi)\cdot A_k, \qquad (2)$$

Построение фундаментальной функции будет осуществляться с помощью вводимого ниже аппарата резольвентной последовательности системы операторов.

Определение. Пусть (R_n) — последовательность $L(X, X)$-значных функций, удовлетворяющих следующим условиям:

а) R_n определена и сильно аналитична в области Λ_n комплексного переменного;

б) найдется такое натуральное число m, что семейство операторов

$$\left\{(1+|\lambda|)^{-m}e^{n\lambda}\left[\left(\sum_{k=0}^{l}\lambda^kA_k\right)\cdot R_n(\lambda)-I\right]\;\middle|\;\lambda\in\Lambda_n\right\} \qquad (3)$$

равностепенно непрерывно;

в) $$A_k\cdot R_n(\lambda)\supset R_n(\lambda)\cdot A_k, \quad k=0, 1, \ldots, l; \quad \lambda\in\Lambda_n. \qquad (4)$$

Тогда назовем (R_n) резольвентной последовательностью системы $(A_0, A_1, \ldots, A_l)$, а области Λ_n, $n=1, 2, 3, \ldots,$ — допустимыми областями для R_n.

Следующие две леммы дают основные свойства резольвентной последовательности, необходимые в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть полуплоскость* $\Pi_n=\{\lambda|\operatorname{Re}\lambda\geqslant n\}$ *допустима для* R_n *и* S_n. *Если существуют такие натуральные числа* m_1 *и* m_2, *что семейства*

$$\{(1+|\lambda|)^{-m_1}R_n(\lambda)\,|\lambda\in\Pi_n\},$$
$$\{(1+|\lambda|)^{-m_2}S_n(\lambda)\,|\lambda\in\Pi_n\}$$

равностепенно непрерывны, то

$$\int\limits_{\partial\Pi_n}\tilde\varphi(\lambda)R_n(\lambda)x\,d\lambda=\int\limits_{\partial\Pi_n}\tilde\varphi(\lambda)S_n(\lambda)x\,d\lambda,\quad x\in X;\quad \varphi\in K, \tag{5}$$

где $\partial\Pi_n$ — *граница области* Π_n, $\tilde\varphi$ — *преобразование функции* φ.

Действительно, по определению резольвентной последовательности имеем

$$P(\lambda)\cdot R_n(\lambda)-I=(1+|\lambda|)^m e^{-n\lambda}\xi_1(\lambda,\ n), \tag{6}$$
$$P(\lambda)\cdot S_n(\lambda)-I=(1+|\lambda|)^m e^{-n\lambda}\xi_2(\lambda,\ n), \tag{7}$$

где $P(\lambda)\overset{\text{def}}{=}\sum\limits_{k=0}^{l}\lambda^k A_k$, а $\xi_1(\lambda,\ n)$ и $\xi_2(\lambda,\ n)$ равностепенно непрерывны по λ.

Из (6), (7) и условий леммы получаем

$$P(\lambda)\cdot R_n(\lambda)\cdot S_n(\lambda)-S_n(\lambda)=(1+|\lambda|)^{m+m_2}e^{-n\lambda}\xi_1(\lambda,\ n)\cdot\eta_2(\lambda,\ n),$$
$$P(\lambda)\cdot R_n(\lambda)\cdot S_n(\lambda)-R_n(\lambda)=(1+|\lambda|)^{m+m_1}e^{-n\lambda}\eta_1(\lambda,\ n)\cdot\xi_2(\lambda,\ n),$$

где $\eta_1(\lambda,n)$ и $\eta_2(\lambda,n)$ равностепенно непрерывны по λ.

Из последних двух соотношений имеем

$$R_n(\lambda)-S_n(\lambda)=(1+|\lambda|)^m e^{-n\lambda}[(1+|\lambda|)^{m_2}\xi_1(\lambda,\ n)\cdot\eta_2(\lambda,\ n)-$$
$$-(1+|\lambda|)^{m_1}\eta_1(\lambda,\ n)\cdot\xi_2(\lambda,\ n)]$$

и, применяя теорему Пэли — Винера и обычную технику теории функций комплексного переменного, получаем

$$\int\limits_{\partial\Pi_n}\tilde\varphi(\lambda)\,(R_n(\lambda)x-S_n(\lambda)x)\,d\lambda=0.$$

Лемма 2. *Пусть полуплоскость* Π_n *допустима для* R_n. *Тогда*

$$(2\pi i)^{-1}\int\limits_{\partial\Pi_n}\tilde\varphi(\lambda)P(\lambda)R_n(\lambda)x\,d\lambda=\varphi(0)x,\quad \varphi\in K;\quad x\in X. \tag{8}$$

В самом деле, из (6) и оценки для $\tilde\varphi$, так же как и при доказательстве леммы 1, получим

$$\int\limits_{\partial\Pi_n}\tilde\varphi(\lambda)\,(P(\lambda)R_n(\lambda)x-x)\,d\lambda=0,$$

откуда следует (8).

Перейдем теперь к основной теореме. Будем считать в дальнейшем, что X бочечно и квазиполно.

Теорема. *Для того чтобы у оператора* P *существовала фундаментальная функция, необходимо и достаточно, чтобы некоторая полуплоскость* Π_a, $a>0$, *была допустимой областью для всех членов* R_n *резольвентной последовательности, а семейства операторов*

$$\{(1+|\lambda|)^{-m}R_n(\lambda)\,|\lambda\in\Pi_a\},\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ldots, \tag{9}$$

равностепенно непрерывны.

Доказательство. 1) Пусть T — фундаментальная функция оператора P, а (μ_n) — некоторая сохраняющая последовательность (см. определение 1 в [3]). Определим

$$R_n(\lambda)=(\mu_n T)(e^{-\lambda(\cdot)})=T(\mu_n e^{-\lambda(\cdot)}), \quad \lambda\in\Pi_a; \quad a>0.$$

Очевидно, R_n является $L(X, X)$-значной сильно аналитичной функцией на Π_a. Используя теорему Пэли — Винера для векторнозначных обобщенных функций, получим, что существует такое натуральное число m, что семейство

$$\{(1+|\lambda|)^{-m}R_n(\lambda)x|\lambda\in\Pi_a\}, \quad x\in X,$$

ограничено, и, следовательно, в силу бочечности пространства X, семейство (9) равностепенно непрерывно. Полагая в (1) $\varphi=\mu_n e^{-\lambda(\cdot)}$, получим

$$\sum_{k=0}^{l}(-1)^k A_k\cdot T\left(\frac{d^k}{dt^k}(\mu_n e^{-\lambda(\cdot)})\right)_{\cdot}=I,$$

откуда следует, что

$$P(\lambda)\cdot R_n(\lambda)-I=(1+|\lambda|)^m e^{-n\lambda}r_n(\lambda),$$

где $r_n(\lambda)$ равностепенно непрерывно по λ, т. е. выполнено (3) с Λ_n, равным Π_0. Наконец, если в (2) положить $\varphi=\mu_n e^{\lambda(\cdot)}$, то получим (4).

Таким образом, мы показали, что любая полуплоскость Π_a, $a>0$, является допустимой для всех R_n и семейства (9) равностепенно непрерывны.

2) Пусть (R_n) — резольвентная последовательность системы $(A_0, A_1, \ldots, A_l)$. Положим

$$T(\varphi)x=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Pi_a}\tilde{\varphi}(\lambda)R_n(\lambda)x\,d\lambda, \quad \varphi\in\mu_n K; \quad x\in X.$$

Из условия теоремы и оценки на $\tilde{\varphi}$ следует, что интеграл сходится абсолютно. Корректность этого определения отображения T вытекает из леммы 1. Принимая во внимание свойства сохраняющей последовательности и бочечность пространства X, получим, что $T\in K'_{R_+}(L(X, Y))$. По лемме 2 T удовлетворяет соотношению (1), а из (4) следует (2). Следовательно, T — фундаментальная функция оператора P.

Теорема доказана.

Замечания. 1) Доказанная теорема обобщает на случай локально-выпуклых пространств основной результат (теорема 1.6) статьи [2] Ж. Шазарена о характеризации фундаментальной функции в банаховом пространстве в терминах оценки оператора $[P(\lambda)]^{-1}$ в некоторой «логарифмической области». Как замечено в [3], даже в простом случае, когда $l=1$ и $A_1=I$, в локально-выпуклом пространстве оператор $[P(\lambda)]^{-1}$ часто не существует, поэтому мы вводим понятие резольвентной последовательности, которая в совокупности по существу заменяет $[P(\lambda)]^{-1}$, но в то же время существует на полуплоскости Π_a, а не только в логарифмической области.

2) Пусть у оператора P существует фундаментальная функция T. Тогда нетрудно показать, что задача Коши $Pu=f$ обобщенно корректна, т. е.

а) Для любого $f\in K'_{[s,+\infty)}(X)$ существует единственное $u\in K'_{[s,+\infty)}(Y)$, что $Pu=f$.

б) Если $f_\alpha\to 0$ в пространстве $K'_{[s,+\infty)}(X)$, то соответствующие этим правым частям решения $u_\alpha\to 0$ в $K'_{[s,+\infty)}(Y)$.

При этом решение дается формулой $u=T*f$ (относительно определения свертки и непрерывности ее см. [3], определение 2 и лемма 2).

3) В качестве следствия из доказанной теоремы получаем следующий результат: если замкнутый линейный оператор A порождает группу-обобщенную функцию [1], то существует фундаментальная функция оператора d^2/dt^2-A^2.

Действительно, если R_n^1 и R_n^2 — резольвентные последовательности (A, I) и $(-A, I)$ соответственно, то в качестве резольвентной последовательности системы можно взять $R_{2n}=R_n^1R_n^2$.

4) В случае $l=1$, $A_1=I$, $A_0=-A$ теорема превращается в критерий порождения полугруппы-обобщенной функции, полученный в ([3]).

5) С помощью понятия резольвентной последовательности системы можно характеризовать свойства фундаментальной функции. Так, например, почти дословно переносятся на фундаментальную функцию оператора P критерии непрерывности, бесконечной дифференцируемости на $(0, +\infty)$ (т. е. гипоэллиптичности оператора P) и аналитичности на секторе, аналогичные соответствующим критериям для полугрупп-обобщенных функции, полученным в заметке ([4]). Переносятся также результаты статьи ([5]) о необходимых и достаточных условиях принадлежности фундаментальной функции к классам $\Gamma\{m_k\}$, которые естественно назвать критериями (m_k) — гипоэллиптичности оператора P.

Новосибирский государственный университет

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
26 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. L. Lions, Portugal. Math., **19** (1960). [2] J. Chazarain, J. Funct. Anal., **7**, № 3 (1971). [3] Ю. М. Вувуникян, ДАН, **198**, № 2 (1971). [4] Ю. М. Вувуникян, ДАН, **203**, № 2 (1972). [5] Ю. М. Вувуникян, Тр. н.-и. инст. математики Воронежск. гос. унив., в. 3, 11 (1971).