

К. М. МАГОМЕДОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА В УЗКИХ ПРОТЯЖЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 27 XI 1972)

Известные точные решения общих уравнений Навье — Стокса описывают лишь отдельные типы течения жидкости ⁽¹⁾. Основные задачи аэродинамики с достаточной для практики точностью описываются различными предельными приближениями этих уравнений по числу Рейнольдса.

В нашей работе получено асимптотическое приближение уравнений Навье — Стокса для задач, содержащих два независимых малых параметра, один из которых характеризует отношение поперечного размера рассматриваемой области к продольному, а другой — отношение вязких членов уравнений к конвективным. В отличие от уравнений Прандтля для пограничного слоя эти уравнения справедливы и при отсутствии вязкости, при этом они становятся асимптотическим приближением уравнений Эйлера.

Пусть ищется установившееся решение уравнений Навье — Стокса в области G с продольным размером L и характерным поперечным размером d . Предполагается, что $\delta = d/L \ll 1$, $Re^{-1} \ll 1$ (Re — характерное число Рейнольдса). Исключение из рассмотрения течений типа Стокса — Озеена и течений за пределами сплошной среды требует выполнения условий $(Re \delta^2)^{-1} \ll 1$, $Kn = M/(Re \delta) \ll 1$, где Kn и M — характерные числа Кнудсена и Маха.

Вывод асимптотических уравнений и формулировка граничных условий основаны на следующих идеях. Из уравнения неразрывности следует, что отношение поперечной скорости к продольной имеет порядок δ . Если из уравнения количества движения в нормальном направлении следует, что поперечное изменение давления порядка δ , то уравнение для продольной составляющей скорости принимает тот же вид, что и соответствующее уравнение Прандтля. Аналогичную форму принимает и уравнение энергии. Если необходимо учитывать поперечное изменение давления, вызванное центробежной силой за счет искривленности линий тока, то для упрощения уравнения продольного движения необходимо проанализировать влияние характерного числа Эйлера для конкретной задачи. Область G может быть ограничена твердой границей, ударной волной и поверхностью раздела двух сред. В первом случае очевидными остаются обычные условия прилипания, на других границах используются обобщенные условия Ренкина — Гюгоньо ^(2, 3).

Рассмотрим три задачи, описываемые подобного вида уравнениями. В первых двух задачах толщина сжатых слоев заранее неизвестна, но определяется через заданные малые параметры.

1. Гиперзвуковое обтекание тупых тел при малых k и Re^{-1} ($k = \rho_\infty/\rho_0$ — отношение плотностей до и после прямого скачка уплотнения, Re — число Рейнольдса по радиусу затупления и параметрам в этой же точке). Область G (рис. 1) в этом случае — тонкий сжатый слой между телом и ударной волной. Как показано в работе ⁽³⁾, течение в этой области описывается следующим асимптотическим приближением уравнений Навье —

Стокса:

$$\begin{aligned} (u\rho r)_x + (v\rho r)_y &= 0, \quad \rho u u_x + \rho v u_y + p'_0(x) = (\mu u_y)_y, \\ \rho u^2 K &= p_y, \quad \rho u H_x + \rho v H_y = \text{Pr}^{-1} (\mu h_y)_y + (\mu u u_y)_y, \\ \rho &= \rho(p, h), \quad \mu = \mu(p, h), \quad H = h + \frac{1}{2} u^2; \end{aligned} \quad (1)$$

здесь $p_0(x)$ — давление на поверхности тела. Необходимо найти решение этих уравнений в области, ограниченной поверхностью тела $y=0$, где должны выполняться условия $u=v=0$, $h=h_w(x)$ ($h_y=0$), и поверхностью $y=y_s(x)$, где должны выполняться обобщенные условия Ренкина — Гюгонно

$$\rho V_n = \rho_\infty V_{n\infty}, \quad \rho_\infty V_{n\infty} (V_\tau - V_{\tau\infty}) = \mu \partial V_\tau / \partial n, \quad (2)$$

$$p + \rho V_n^2 = p_\infty + \rho_\infty V_{n\infty}^2, \quad \rho_\infty V_{n\infty} (H - H_\infty) = \text{Pr}^{-1} \mu \partial h / \partial n + \mu V_\tau \partial V_\tau / \partial n;$$

здесь τ и n — нормальное и касательное направления соответственно.

Вывод, анализ и некоторые результаты решения этих уравнений можно найти в работе (3).

2. Рассмотрим начальный участок смещения нерасчетной гиперзвуковой струи, вытекающей из сопла в неподвижную среду (рис. 2). Областью G здесь является сжатый слой между ударной волной и разделяющей две среды линией тока. Возьмем криволинейную ортогональную систему координат, связанную с заранее неизвестной разделяющей линией тока. Обозначим через r , β и $K = -d\beta/dx$ расстояние до оси симметрии, угол наклона к этой оси и кривизну разделяющей линии соответственно. Предположение тонкого сжатого слоя позволяет упростить уравнение Навье — Стокса и получить уравнения типа (1) с обобщенными граничными условиями Ренкина — Гюгонно (2) на ударной волне и асимптотическими условиями в покоящейся среде.

Более подробный анализ порядка величин приводит к дальнейшим упрощениям. Действительно, если пренебречь влиянием вязкости в изэнтропическом ядре, то, согласно оценкам и расчетам работ (4, 5), течение в ядре при больших значениях нерасчетности ($n = p_a/p_n \gg 1$) близко к течению от фиктивного источника с центром в срезе сопла. Тогда справедливы оценки

$$\rho_1/\rho_a \sim n^{-1}, \quad p_1/p_a \sim n^{-\gamma}, \quad p_x/(\rho u u_x) \sim (\gamma - 1)/M_a^2 \ll 1,$$

где γ — показатель адиабаты, индексами «а», 1, «н» обозначены параметры соответственно на срезе сопла, перед ударной волной и в покоящейся

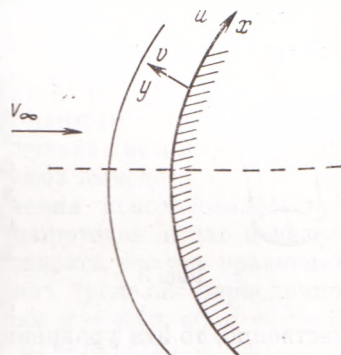


Рис. 1

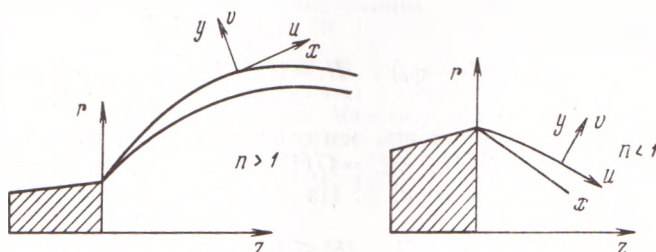


Рис. 2

среде. Таким образом, для сжатого слоя струй во втором уравнении системы (1) можно не учитывать третий член слева $p'_0(x)$.

Упростим далее граничные условия на ударной волне (2). Пусть $y = y_s(x)$ — уравнение скачка уплотнения и δ — малая величина, характе-

ризующая относительную толщину сжатого слоя. Учитывая порядки величин $y_s' = O(\delta)$, $v/V_a = O(\delta)$, из условий (2) можно получить

$$u = u_1 + \frac{\mu}{\rho_1 V_{1n}} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \rho v = \rho_1 v_1 + \rho u y_s', \quad V_{1n} = -u_1 y_s' + v_1,$$

$$p = p_1 + \rho_1 V_{1n}^2, \quad H = H_1 + \frac{\mu}{\rho_1 V_{1n}} \left(\text{Pr}^{-1} \frac{\partial h}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

где $u_1 = V_1 \cos(\theta - \beta)$, $v_1 = V_1 \sin(\theta - \beta)$, θ — угол между вектором скорости и осью симметрии перед скачком уплотнения.

Рассмотрим теперь случай перерасширенных струй ($n < 1$). В этом случае для оценок параметры перед скачком можно принять равными их значениям на срезе сопла. Опуская выкладки, отметим, что при $(1 + \gamma M_a^2)^{-1} \leq n < 1$, $k/M_a \ll n$ уравнение для продольной скорости имеет тот же вид, что и для недорасширенной струи.

Итак, для сжатого слоя перерасширенных и недорасширенных гиперзвуковых струй справедливы асимптотические уравнения (1) без члена с давлением во втором уравнении.

Эти уравнения получены для области, достаточно удаленной от оси симметрии, т. е. при приближении разделяющей линии тока к оси они перестают быть справедливыми и эту область необходимо рассматривать особо. Важным следствием этих уравнений является то, что если толщина зоны смешения меньше толщины сжатого невязкого слоя, то можно воспользоваться известными решениями смешения плоских изобарических ламинарных и турбулентных струй⁽⁶⁾. Но если влияние вязкости более существенно, то эти уравнения необходимо решать совместно с уравнениями невязкого течения для изэнтропического ядра.

3. Рассмотрим течение жидкости или газа в пространственной трубе круглого сечения в предположении малости отношения радиуса к длине трубы, т. е. $\delta = r/L \ll 1$ (рис. 3).

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{R}(x)$ — уравнение оси трубы (x — длина дуги). Введем криволинейную цилиндрическую систему координат, связанную с сопровождающим трехгранником оси трубы:

$$\mathbf{r}(x, y, \varphi) = \mathbf{R}(x) + y \cos(\varphi - \varphi_0) \mathbf{n}(x) + y \sin(\varphi - \varphi_0) \boldsymbol{\beta}(x);$$

здесь $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\beta}$ — орты главной нормали и бинормали соответственно. На основе формул Серре — Френе можно получить коэффициенты Ляме

$$H_x = 1 - yK \cos(\varphi - \varphi_0), \quad H_y = 1, \quad H_\varphi = y, \quad \varphi_0 = \int_0^x \kappa dx,$$

где K и κ — кривизна и кручение оси соответственно. В дальнейшем предполагается, что $KL = O(1)$, $\kappa L = O(1)$. Пусть u , v , w — составляющие вектора скорости по осям x , y , φ . Из уравнения неразрывности следует, что $v/V_0 = O(\delta)$.

При выполнении условий $\text{Re}^{-1}/\delta^2 \leq 1$, $p_0/(\rho_0 V_0^2) = O(1)$ из уравнений движения в радиальном и окружном направлениях следует, что изменение давления в поперечном направлении имеет порядок δ , т. е. $p = p_0(x) \cdot [1 + O(\delta)]$.

Полагая в начальном сечении $x = 0$, $w = 0$, можно и всюду принять $w = 0$, так как это не противоречит ни условию прилипания, ни условию непротекания при $\text{Re}^{-1} = 0$.

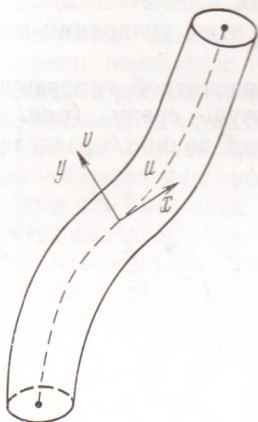


Рис. 3

Учитывая указанные оценки, можно получить асимптотическое уравнение движения жидкости и газа в тонких трубах:

$$\begin{aligned} \rho u u_x + \rho v u_y + p_0'(x) &= y^{-1}[(y \mu u_y)_y + y^{-1}(\mu u_\varphi)_\varphi], \\ \rho u H_x + \rho v H_y &= y^{-1}[(Pr^{-1} \mu y h_y)_y + y^{-1}(Pr^{-1} \mu h_\varphi)_\varphi + \\ &+ (y \mu u u_y)_y + y^{-1}(\mu u u_\varphi)_\varphi], \quad H = h + 1/2 u^2, \\ (\rho u y)_x + (\rho v y)_y &= 0, \quad \rho = \rho(p, h), \quad \mu = \mu(h). \end{aligned} \quad (3)$$

Если начальные и граничные условия для u и h не зависят от φ , то в первых уравнениях нужно опустить производные по φ . Тогда граничные условия для этой системы имеют вид

$$\begin{aligned} y=0 \quad v &= \partial u / \partial y = \partial h / \partial y = 0, \\ y=y_c(x) \quad u &= v = 0, \quad h = h_c(x), \quad \partial h / \partial y = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Неизвестную функцию $p_0(x)$ можно найти из условия постоянства расхода $Q = \int_0^{y_c} \rho u y dy$ через сечение трубы, являющегося следствием уравнения неразрывности и граничных условий (4).

Система уравнений (3) параболического типа и ее решение может быть найдено шаг за шагом по известным начальным данным и граничным условиям (4). Для плоского и осесимметричного случаев система (3) совпадает с уравнениями, приведенными в работе (7) без вывода.

Отметим, что предположение о круглости сечения использовалось при выводе уравнений, чтобы в граничные условия непротекания для невязкого газа не входила составляющая w . Но можно показать, что эти уравнения справедливы при более общих граничных условиях (условия периодичности по φ и условия на стенке трубы с уравнением $y = y_c(x, \varphi)$ и $u = v = 0$, $h = h_c(x, \varphi)$), если выполняются соотношения $y_c = R_1(x) R_2(\varphi)$ и $w = 0$ при $x = 0$.

Уравнения (3) правильно описывают известные типы течений и приближений: течение типа Гагена — Пуазейля, невязкое течение в так называемом одномерном приближении, приближение Эйлера — Прандтля, т. е. асимптотический пограничный слой с одномерным распределением давления, турбулентные течения жидкости и газа в длинных трубах с соответствующими членами в правых частях первых уравнений (3).

Дагестанский политехнический институт
Махачкала

Поступило
20 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Е. Кочин, И. Н. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, М., 1963. ² Н. Е. Кочин, К теории разрыва в жидкости, Собр. соч., Изд. АН СССР, 2, 1949, стр. 5. ³ К. М. Магомедов, Механика жидкости и газа, № 2 (1970). ⁴ Г. И. Аверенкова, Э. А. Ашратов и др., Сверхзвуковые струи идеального газа, М., 1970. ⁵ В. С. Авдудевский, А. В. Иванов и др., ДАН, 197, № 1, 46 (1971). ⁶ Бай Ши-и, Теория струй, М., 1960. ⁷ J. C. Williams, AIAA J., 1, № 1 (1963).