Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 2

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

И. Д. МАЕРГОЙЗ

# ОЦЕНКИ ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

*(Представлено академиком В. М. Глушковым 10 IV 1973)*

В работе ([1]) М. И. Вишик доказал неравенство
$$\|\partial u/\partial n\|_{L_2(S)}\leqslant \|\,|\mathrm{grad}_S u|\,\|_{L_2(S)}, \tag{1}$$
где $u$ — гармоническая внутри сферы $S$ функция, $\mathrm{grad}_S\, u$ — касательная к $S$ составляющая градиента $u$. С. Г. Михлин в ([2]) и ([3]) установил обратное неравенство
$$\|\,|\mathrm{grad}_S u|\,\|_{L_p(S)}\leqslant C_p\|\partial u/\partial n\|_{L_p(S)}, \tag{2}$$
где $1<p<\infty$, а $C_p$ зависит только от $p$ и $S$. При этом С. Г. Михлин замечает (см. ([3]), стр. 216): «Было бы интересно доказать неравенство М. И. Вишика при $p\neq 2$». В ([4]) * неравенство (1) при $1<p<\infty$ доказано для функции, гармонической в конечной области трехмерного пространства с границей $S\in C^{2,\lambda}$. Ниже значительно более простым путем получается оценка типа (1) при $1<p<\infty$ для эллиптического уравнения 2-го порядка с переменными коэффициентами в пространстве любого конечного числа измерений и при менее жестких условиях гладкости на $S$ и даются некоторые применения этого неравенства. Для гармонических функций приводятся эффективные, т. е. выраженные через исходные данные задачи, оценки нормальной составляющей градиента на границе области в случае задачи Дирихле и касательной составляющей — в случае задачи Неймана.

1. В области $\Omega$, границей которой является ляпуновская поверхность $S$, рассмотрим равномерно эллиптическое уравнение
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-c(x)u=0,\quad c(x)\geqslant 0. \tag{3}$$

Формально самосопряженное уравнение исследуется только с целью упрощения формулировок. Примем, что гладкость коэффициентов в (3) такова, что существует главное симметричное фундаментальное решение $G$. Тогда справедлива

Теорема 1. *Для существования почти всюду предельных на $S$ значений производной по конормали от решения $u$ уравнения (3), суммируемых со степенью $p$, $1<p<\infty$, необходимо и достаточно, чтобы граничные значения $u$ принадлежали $W_p^1(S)$. При этом*
$$c_p\|\,|\mathrm{grad}_S\, u|\,\|_{L_p(S)}\leqslant\left\|a\frac{\partial u}{\partial\nu}\right\|_{L_p(S)}\leqslant C_p^1\|\,|\mathrm{grad}_S\, u|\,\|_{L_p(S)}+C_p^2\|u\|_{L_p(S)}, \tag{4}$$
*где $\nu$ — направление конормали* $a(x)=\left\{\sum_{i=1}^n\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\cos(n_x,e_j)\right]^2\right\}^{1/2}$,
$c_p$, $C_p^1$ *и* $C_p^2$ *— не зависящие от $u$ константы.*

Необходимость и левое из неравенств (4) следуют из оценки С. Г. Михлина (2), которая без труда переносится на случай уравнения (3) (см. ([2,3])).

Доказательство достаточности основано на следующем интегральном

* С. Г. Михлин любезно обратил внимание автора на работу ([4]).

представлении градиента потенциала двойного слоя $V$:

$$\operatorname{grad} V(\xi) = \oint\limits_S \left[ \bar{e}_k \frac{\partial u}{\partial x_k} a_{ij} \frac{\partial G}{\partial x_j} \cos(n_x, e_i) - \bar{e}_k \frac{\partial u}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial G}{\partial x_j} \cos(n_x, e_k) \right] ds_x + \\ + \oint\limits_S u \left[ \bar{e}_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial G}{\partial x_j} \cos(n_x, e_i) - \bar{n}_x c G \right] ds_x; \qquad (5)$$

здесь $V(\xi) = \oint\limits_S u(x) a(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \nu_x} ds_x$, а гладкость плотности $u(x)$ на $S$ такова, что возможно дифференцируемое продолжение $u$ в $\Omega$.

Если в произвольной точке $x \in S$ построить местную декартову систему координат так, чтобы ось $x_1$ совпадала с нормалью $n_x$ к $S$, то в первом интеграле из (5) слагаемые, содержащие $\partial u / \partial x_1$, сократятся, т. е. первый интеграл в (5) является оператором над $\operatorname{grad}_S u$. Предполагая $u$ в $\Omega$ достаточно гладкой, из формулы Грина выводим интегральные уравнения соответственно для внутренней и внешней к $S$ областей:

$$a(\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi^\pm} \mp 2 \oint\limits_S a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x^\pm} a(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} ds_x = 2a(\xi) \frac{\partial V(\xi)}{\partial \nu_\xi^\pm}. \qquad (6)$$

Если $c(x) \neq 0$, то уравнения (6) однозначно разрешимы в $L_p(S)$ и их решения являются ограниченными в $L_p(S)$ операторами над правой частью. Используя (5) и применяя, где надо, теорему Кальдерона и Зигмунда об ограниченности в $L_p$ сингулярных интегралов [3, 5], просто показать, что правая часть (6) является ограниченным в $L_p(S)$, $1 < p < \infty$, оператором над $|\operatorname{grad}_S u|$ и $u$. Отсюда для достаточно гладких граничных значений $u$ следует правое из неравенств (4). Доказательство достаточности заканчивается применением обычной процедуры продолжения по непрерывности с всюду плотного множества. Случай $c(x) \equiv 0$ требует для внешней области некоторого водоизменения рассуждений.

Теорема 2. *Для существования почти всюду предельных на $S$ значений производной по конормали от потенциала двойного слоя, суммируемых со степенью $p$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы плотность потенциала принадлежала $W_p^1(S)$.*

Путь доказательства достаточности ясен из предыдущих рассуждений. Необходимость удалось доказать только для гармонического потенциала.

Теорема 3. *Для того чтобы предельные на $S$ значения потенциала простого слоя принадлежали $W_p^1(S)$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы плотность потенциала принадлежала $L_p(S)$.*

Сформулированной теореме можно придать иную форму.

Теорема 4. *Если ядро $K(Q, M)$ интегрального уравнения 1-го рода*

$$\oint\limits_S \sigma(M) K(Q, M)\, ds_M = u(Q) \qquad (7)$$

*является главным симметричным фундаментальным решением уравнения* (3), *то для существования в $L_p(S)$, $1 < p < \infty$, единственного решения уравнения* (7) *необходимо и достаточно, чтобы $u \in W_p^1(S)$.*

При доказательстве теорем 3 и 4 используется теорема 1. Утверждения теорем 2, 3 и 4 сопровождаются оценками типа (4).

Теорему 1 можно использовать для вывода достаточных условий существования интеграла Дирихле. Необходимое и достаточное условие существования интеграла Дирихле найдено Л. Н. Слободецким [6] и заключается в том, что граничная функция должна принадлежать пространству $W_2^{\frac{1}{2}}(S)$. Это условие формулируется в терминах сходимости интеграла

$$\oint\limits_S \oint\limits_S \frac{(u(M) - u(Q))^2}{r_{QM}^{m+1}} ds_M\, ds_Q, \quad m \text{ — размерность } S.$$

Поэтому, видимо, сохраняют определенный интерес достаточно широкие достаточные условия существования интеграла Дирихле, выраженные в более простых терминах гладкости граничной функции. Некоторые условия такого рода содержит

Теорема 5. *Если* $u \in W_p^1(S) \cap L_q(S)$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, *то интеграл Дирихле существует.*

Следствие. *Если* $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, *то справедливо вложение* $W_p^1 \cap L_q \to W_2^{1/2}$. *Отсюда и из определения пространства* $W_2^{l+1/2}$ *вытекает более общее вложение* $W_p^{l+1} \cap W_q^l \to W_2^{l+1/2}$.

При $p \geqslant 2m/(m+1)$ из $u \in W_p^{l+1}$, согласно теоремам вложения, следует $u \in W_q^l$. Поэтому при $p \geqslant 2m/(m+1)$, находим $W_p^{l+1} \to W_2^{l+1/2}$, что совпадает с результатами из ([7]) о вложении $W_p^{l+1}$ в $W_2^{l+1/2}$. Таким образом, сформулированное следствие расширяет результаты из ([7]) о вложениях в $W_2^{l+1/2}$.

2. Приведем теперь эффективные, т. е. выраженные через исходные данные задачи оценки градиента гармонической функции. Поверхность $S$ будем считать выпуклой с всюду конечными главными радиусами кривизны. Рассмотрение ведется для трехмерного пространства, однако результаты автоматически переносятся на многомерный случай. Для гармонической внутри $S$ функции уравнение (6) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial n}(Q) + \frac{1}{2\pi} \oint_S \frac{\partial u}{\partial n}(M) \frac{\cos(\bar{r}_{MQ}, \bar{n}_Q)}{r^2_{QM}} ds_M = F(Q), \tag{8}$$

$$F(Q) = \frac{1}{2\pi} \oint_S \left( [\bar{n}_M, \operatorname{grad}_S u(M)], \left[ \bar{n}_Q, \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r_{QM}} \right] \right) ds_M. \tag{9}$$

Обозначим через $\tilde{L}(S)$ подпространство функций из $L(S)$, для которых $\oint_S u(M)\, ds_M = 0$, а через $A$ — интегральный оператор в (8).

Теорема 6. *Имеет место оценка*

$$\|A\|_{\tilde{L}(S)} < 1 - S/(4\pi R_0 d), \tag{10}$$

*где $S$ — площадь поверхности, $R_0$ — максимальный из главных радиусов кривизны во всех точках $S$, $d$ — диаметр $S$.*

При доказательстве (10) используется одна теорема о выпуклых поверхностях (см. ([8]), стр. 143). Из (8) и (10) следуют неравенства

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L(S)} \leqslant \frac{4\pi R_0 d}{S} \|F\|_{L(S)}, \tag{11}$$

$$J(u) = \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dv \leqslant \frac{2\pi(M-m) R_0 d}{S} \|F\|_{L(S)}, \tag{12}$$

где $M = \max_{M \in S} u(M)$, $m = \min_{M \in S} u(M)$. Заметим, что оценка (12) справедлива, если $u$ на $S$ принадлежит пространству $W^1_{1+\varepsilon}(S) \cap C(S)$, $\varepsilon > 0$. Используя (11), из (8) можно вывести следующую эффективную оценку

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{C(S)} \leqslant \frac{1}{1 - {}^1/_2 \arcsin \dfrac{\alpha}{r}} \left( \frac{R_0 d}{2 r_0 S \alpha} \|F\|_{L(S)} + \|F\|_{C(S)} \right), \tag{13}$$

где $r_0$ — минимальный из главных радиусов кривизны во всех точках $S$, $\alpha$ — параметр, подчиненный неравенствам $0 < \alpha \leqslant r_0$. При вычислениях целесообразно брать то значение $\alpha$ из $(0, r_0]$, при котором правая часть (13) минимальна.

Подобные результаты имеют место и для внешней области. Для плоской задачи справедливы более точные (изопериметрические ([9])) оценки.

Отметим, что в оценке (13) используются минимальные условия гладкости граничных значений, поскольку непрерывность $F(Q)$ и $\operatorname{grad}_S u(Q)$ необходима и достаточна для непрерывной дифференцируемости гармонической функции в замкнутой области.

3. Приведем некоторые эффективные оценки в случае задачи Неймана. Для внутренней к $S$ области имеем

$$\max_{Q\in S, P\in S}|u(Q)-u(P)|\leqslant\frac{2R_0d}{S}\max_{Q\in S,P\in S}\left|\oint_S\frac{\partial u}{\partial n}(M)\left(\frac{1}{r_{QM}}-\frac{1}{r_{PM}}\right)ds_M\right|,\tag{14}$$

$$J(u)\leqslant\frac{R_0d}{S}\left\|\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_{L(S)}\max_{Q\in S,P\in S}\left|\oint_S\frac{\partial u}{\partial n}(M)\left(\frac{1}{r_{QM}}-\frac{1}{r_{PM}}\right)ds_M\right|.\tag{15}$$

$$\min\|u\|_{C(S)}\leqslant\frac{R_0d}{S}\max_{Q\in S,P\in S}\left|\oint_S\frac{\partial u}{\partial n}(M)\left(\frac{1}{r_{QM}}-\frac{1}{r_{PM}}\right)ds_M\right|.\tag{16}$$

В правой части (16) минимум берется на множестве решений внутренней задачи Неймана. Для внешней задачи имеем

$$\|u\|_{C(S)}\leqslant\left(\frac{4R_0d}{S}+\frac{1}{2\pi}\right)\cdot\left\|\oint_S\frac{\partial u}{\partial n}(M)\frac{ds_M}{r_{QM}}\right\|_{C(S)},\tag{17}$$

$$J(u)\leqslant\left(\frac{4R_0d}{S}+\frac{1}{2\pi}\right)\cdot\left\|\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_{L(S)}\cdot\left\|\oint_S\frac{\partial u}{\partial n}(M)\frac{ds_M}{r_{QM}}\right\|_{C(S)}.\tag{18}$$

Для внутренней и внешней задач Неймана справедлива оценка

$$\||\operatorname{grad}_S u|\|_{C(S)}\leqslant\frac{1}{1-{}^3/_2\arcsin\dfrac{\alpha}{r_0}}\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{5(S-\pi\alpha^2)}{4\pi r_0\alpha^2}-\frac{r_0}{\alpha\sqrt{r_0^2-\alpha^2}}\right]\|u\|_{C(S)}+\||\Phi|\|_{C(S)}\right\},\tag{19}$$

где

$$\bar\Phi(Q)=\frac{1}{2\pi}\oint_S\frac{\partial u}{\partial n}(M)\left[\bar n_Q,\operatorname{grad}_Q\frac{1}{r_{QM}}\right]ds_M,\tag{20}$$

$\alpha$ — любое число из интервала $(0, r_0\sin{}^3/_2)$.

Неравенство (19) совместно с (16), (17) и (20) позволяет эффективно оценить $\||\operatorname{grad}_S u|\|_{C(S)}$. В заключение приведем оценку для второго характеристического числа уравнения (8):

$$|\lambda_2|>\frac{1}{1-S/(4\pi R_0d)}.\tag{21}$$

Это неравенство дополняет в случае выпуклой поверхности известные результаты относительно спектра уравнения (8).

Автор признателен С. Г. Михлину и С. Д. Эйдельману за стимулирующие беседы.

Институт кибернетики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
3 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Вишик, УМН, 6, № 2, 165 (1951). [2] С. Г. Михлин, УМН, 6, № 6, 158 (1951). [3] С. Г. Михлин, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962. [4] L. de Vito, Rend. Math. e. appl., 23, № 3—4, 273 (1964). [5] A. P. Calderon, A. Zygmund, Am. J. Math., 78, № 2, 289 (1956). [6] Л. Н. Слободецкий, Уч. зап. Ленинград. пед. инст. им. Герцена, 197, 54 (1958). [7] С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969. [8] В. Бляшке, Круг и шар, М., 1967. [9] Г. Полиа, Г. Сегё, Изопериметрические неравенства в математической физике, М., 1962.