

УДК 517.948.3

МАТЕМАТИКА

В. Б. ДЫБИН, В. Н. ГАПОНЕНКО

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ КОЭФФИЦИЕНТОВ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 12 II 1973)

В пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ рассматривается следующая краевая задача:

$$A_1(x)P^+\Psi(x) + A_2(x)P^-\Psi(x) = B(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

где

$$P^\pm \Psi = \pm \frac{1}{2} \Psi(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) (t-x)^{-1} dt.$$

Среди большого количества работ, посвященных изучению оператора (1), отметим исследования ⁽¹⁻³⁾, на результаты которых мы будем опираться в дальнейшем. В частности, если функции $A_{1,2}(x)$ принадлежат прямой сумме двух алгебр: алгебры B почти-периодических в смысле Бора функций и алгебры R_0 непрерывных функций, представимых в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье, то краевая задача (1) тесно связана с интегрально-разностными уравнениями, рассмотренными И. Ц. Гохбергом и И. А. Фельдманом ⁽⁴⁾. Основной результат, вытекающий для нее из указанной работы, состоит в том, что условие $\inf_{-\infty < x < \infty} |A_1(x)A_2(x)| \neq 0$ яв-

ляется необходимым и достаточным, для того чтобы оператор (1) был $\Phi_\pm$ - или Φ -оператором.

Мы изучаем такой случай нарушения этого условия, когда коэффициенты задачи имеют на вещественной оси счетное множество степенных нулей, распределение которых определяется следующим представлением функций $A_{1,2}(x)$:

$$A_1(x) = (1 - e^{i\alpha x}) \tilde{A}_1(x), \quad A_2(x) = (1 - e^{-i\beta x}) \tilde{A}_2(x), \quad (2)$$

где α, β — положительные вещественные числа, $\tilde{A}_i(x) \in B + R_0$, $i=1, 2$, $\inf_{-\infty < x < \infty} |\tilde{A}_1(x)\tilde{A}_2(x)| \neq 0$. Из (2) следует, что нули функций $A_{1,2}(x)$ рас-

пределены периодически и имеют точку сгущения на ∞ .

Построено общее решение задачи (1) с указанием необходимых и достаточных условий ее разрешимости. Рассматривая оператор, порожденный левой частью уравнения (1), из пространства $L_2(-\infty, \infty)$ в некоторое более узкое банахово пространство $DL_2(-\infty, \infty)$, получаем, что он становится Φ_+ -, Φ_- или Φ -оператором. Пространство DL_2 строится эффективно.

Кроме того, рассматривается случай квазипериодического распределения нулей, т. е. такого распределения, которое некоторым дробно-линейным преобразованием вещественной прямой в себя переводит это распределение в периодическое.

1. Классы функций. Вспомогательные предложения. Через $E_2\{a, b\}$ обозначим класс целых функций $\Omega(x)$, представ-

мых в виде $\Omega(x) = \int_a^b \omega(t) e^{ixt} dt$, где $\omega(t) \in L_2(a, b)$. Через M_n обозначим ли-

неал, натянутый на функции $x^j(x+i)^{-n}$, $j=0, 1, \dots, n-1$.

Пусть $x_k = 2k\pi/\alpha$, $k \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Если функция $\Phi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, все точки x_k являются ее точками Лебега и $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi(x_k)|^2 < \infty$, то че-

рез $J_{\alpha, \Phi}(x)$ обозначим следующий ряд, сходимость которого понимается в среднеквадратичном:

$$J_{\alpha, \Phi}(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(x_k) \frac{e^{ix\alpha} - 1}{i(x - x_k)}. \quad (3)$$

Ряд (3) представляет собой целую функцию класса $E_2\{0, \alpha\}$ и является бесконечномерным аналогом интерполяционного многочлена Эрмита: $J_{\alpha, \Phi}(x_k) = \Phi(x_k)$, $k \in Z$.

Пусть $a_k = (x_k + x_{k-1})/2$, $b_k = (x_k + x_{k+1})/2$, $k \in Z$. Введем семейство проекторов $\{P_k\}$, $P_k \Phi(x) = \varepsilon_k(x) \Phi(x)$, где $\varepsilon_k(x)$ — характеристическая функция интервала (a_k, b_k) . Через $L_2\{2\pi/\alpha\}$ обозначим линейал тех функций $\Phi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, которые обладают следующими свойствами:

а) точки x_k , $k \in Z$, являются точками Лебега для функции $\Phi(x)$ и $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi(x_k)|^{\alpha} < \infty$;

$$б) \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k \left[\frac{\Phi(x) - \Phi(x_k)}{x - x_k} \right] \in L_2(-\infty, \infty).$$

Введем оператор N_{α} , определенный на $L_2\{2\pi/\alpha\}$, $N_{\alpha} \Phi(x) = (1 - e^{ix\alpha})^{-1} \cdot [\Phi(x) - J_{\alpha, \Phi}(x)]$. В терминах этого оператора описание линейала $L_2\{2\pi/\alpha\}$ дает

Теорема 1. Для того чтобы $\Phi(x) \in L_2\{2\pi/\alpha\}$, необходимо и достаточно, чтобы $N_{\alpha} \Phi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$.

Из теоремы 1 вытекает, что с введением нормы

$$\|\Phi(x)\| = \|N_{\alpha} \Phi\|_{L_2} + \|\{\Phi(x_k)\}_{k=-\infty}^{\infty}\|_{l_2}$$

$L_2\{2\pi/\alpha\}$ превращается в банахово пространство. Оператор сингулярного интегрирования ограничен в пространстве $L_2\{2\pi/\alpha\}$.

Линейалы M_n , $E_2\{a, b\}$, $-\infty < a, b < \infty$, и $L_2^{\pm}\{2\pi/\alpha\} = P^{\pm}(L_2\{2\pi/\alpha\})$ являются подпространствами пространства $L_2\{2\pi/\alpha\}$. Подпространства M_n и $E_2\{0, c\}$, $c \geq 0$, являются инвариантными для оператора N_{α} . При этом для натурального n $N_{\alpha}(M_n) = M_n$, $N_{\alpha}(E_2\{0, c\}) = 0$ при $0 \leq c \leq \alpha$, $N_{\alpha}(E_2\{0, c\}) = E_2\{0, c - \alpha\}$ при $c > \alpha$.

2. Уравнение (1) в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$. Периодическое распределение особенностей. Пусть для коэффициентов задачи (1) выполняется представление (2). Тогда функции $\tilde{A}_i(x)$ допускают факторизацию

$$\tilde{A}_i(x) = \tilde{A}_i^-(x) e^{ixc_i} \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{n_i} \tilde{A}_i^+(x), \quad i=1, 2,$$

где $[\tilde{A}_i^{\pm}(x)]^{\pm 1} \in B + R_0$ и аналитически продолжимы соответственно в верхнюю или нижнюю полуплоскость,

$$c_i = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} [\arg a_i(x)]_{-l}^l, \quad n_i = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{\tilde{A}_i(x)}{a_i(x)} \right]_{-\infty}^{\infty},$$

$a_i(x)$ — почти-периодическая компонента функции $\tilde{A}_i(x)$ (см. (4)).

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$M_1 \Phi = (1 - e^{ix\alpha}) P^+ \Phi - e^{ixc} \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^n (1 - e^{-ix\beta}) P^- \Phi = F(x), \quad (4)$$

где $c=c_2-c_1$, $n=n_2-n_1$. Уравнение (1) стандартным преобразованием всегда может быть приведено к виду (4). Для определенности будем предполагать, что $\alpha > \beta$ и α/β — рациональное число. Тогда существуют такие натуральные числа m и p , что $\beta = (m/p)\alpha$, и следовательно, функции $1-e^{ix\alpha}$, $1-e^{-ix\beta}$ имеют бесконечное множество общих нулей вида $y = 2ml\pi/\beta$, $l \in \mathbb{Z}$.

Основной результат для оператора M_1 состоит в том, что его образ является подпространством пространства $L_2^+ \{2\pi/\alpha\} + L_2^- \{2\pi/\alpha\}$.

Действительно, если выполняется равенство (4) для некоторой функции $\Phi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, то из (4) следует, что

$$(1-e^{ix\alpha})P^+\Phi(x) = \Omega_c(x) + R_n(x) + P^+F(x), \quad (5)$$

$$(1-e^{-ix\beta})e^{ix\alpha} \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^n P^-\Phi(x) = \Omega_c(x) + R_n(x) - P^-F(x), \quad (6)$$

где $\Omega_c(x) \in E_2\{0, c\}$, $R_n(x) \in M_n$. Но тогда из теоремы 1 следует, что $P^+F(x) \in L_2\{2\pi/\alpha\}$, $P^-F(x) \in L_2\{2\pi/\beta\}$. Таким образом, условие

$$F(x) \in L_2^+ \{2\pi/\alpha\} + L_2^- \{2\pi/\beta\} \quad (7)$$

необходимо для разрешимости уравнения (4).

Метод, которым получается полное описание образа оператора M_1 , продемонстрируем в частном случае, когда $c = \alpha + \beta$, $n = 0$ и, следовательно, $R_n(x) = 0$.

Поддействуя на равенство (5) оператором N_α , получим

$$P^+\Phi = \Omega_\beta(x) + N_\alpha P^+F, \quad (8)$$

где $\Omega_\beta(x) = N_\alpha \Omega_c(x)$. Для того чтобы функция (8) была решением уравнения (5), необходимо и достаточно, чтобы $\Omega_c(x) = (1-e^{ix\alpha})\Omega_\beta(x) - J_{\alpha, P^+F}(x)$. Учитывая это и действуя на равенство (6) оператором N_β^* , получаем, что

$$P^-\Phi = e^{-ix\alpha} N_\beta [(e^{ix\alpha} - 1)\Omega_\beta(x) + J_{\alpha, P^+F} + P^-F]. \quad (9)$$

Для того чтобы функция, определяемая равенством (9), была решением уравнения (6), необходимо и достаточно, чтобы $J_{\beta, V} = 0$, где $V(x) = (e^{ix\alpha} - 1)\Omega_\beta(x) + J_{\alpha, P^+F} + P^-F$. Это возможно тогда и только тогда, когда

$$V(y_j) = 0, \quad y_j = \frac{2j\pi}{\beta}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Так как $e^{iy_j\alpha} = 1$, $J_{\alpha, P^+F}(y_j) = [P^+F](y_j)$ для всех $j = ml$, $l \in \mathbb{Z}$, то последние условия эквивалентны требованию

$$F\left(\frac{2lm\pi}{\beta}\right) = 0, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (11)$$

Условия (10) определяют функцию $\Omega_\beta(x)$ с точностью до произвольной целой функции $\Omega_{\beta/m}(x)$ класса $E_2\{0, \beta/m\}$ следующим образом:

$$\Omega_\beta(x) = \frac{1-e^{ix\beta}}{1-e^{ix\beta/m}} \Omega_{\beta/m}(x) + \frac{1}{\beta} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq ml}}^{\infty} u_j \frac{e^{ix\beta} - 1}{i(x-y_j)}, \quad (12)$$

* Оператор N_β определяется аналогично оператору N_α по системе точек $y_j = 2j\pi/\beta$, $j \in \mathbb{Z}$.

где

$$u_j = \frac{[P-F](y_j) + J_{\alpha, P^* F}(y_j)}{1 - e^{iy_j \alpha}}, \text{ при этом } \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq ml}} |u_j|^2 < \infty.$$

Таким образом, условия (7), (11) необходимы и достаточны для разрешимости уравнения (4).

Сформулируем окончательный результат для задачи (1) в рассмотренном случае. Через DL_2 обозначим банахово пространство функций $B(x) \in L_2$ таких, что $\tilde{B}(x) = [\tilde{A}_1^-(x) \tilde{A}_2^+(x)]^{-1} B(x) \in L_2^+ \{2\pi/\alpha\} + L_2^- \{2\pi/\beta\}$, $B(y_j) = 0$, $y_j = 2j\pi/\beta$, $j \in \mathbb{Z}$, с нормой

$$\|B\|_{DL_2} = \|P^+ \tilde{B}\|_{L_2^+ \{2\pi/\alpha\}} + \|P^- \tilde{B}\|_{L_2^- \{2\pi/\beta\}}.$$

Теорема 2. Пусть $c = \alpha + \beta$, $n = 0$. Оператор, порожденный левой частью уравнения (1) и рассматриваемый из L_2 в DL_2 , обратим справа. Если $B(x) \in DL_2$, то общее решение уравнения (1) имеет вид (8), (9), (12),

$$\text{где } F(x) = e^{-ixc_1} \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^{n_1} \tilde{B}(x).$$

Аналогично рассматриваются случаи других возможных значений параметров c и n , а также случаи, когда β/α иррационально.

3. Случай квазипериодического распределения особенностей. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — вещественные числа и $D = a_1 a_3 - a_2 a_4 \neq 0$. Оператор

$$[K\Phi](t) = \frac{1}{a_3 t + a_4} \Phi \left(\frac{a_1 t + a_2}{a_3 t + a_4} \right)$$

является линейным непрерывно обратимым в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$. Его обратный оператор имеет вид

$$[K^{-1}\Psi](x) = \frac{D}{a_1 - a_3 x} \Psi \left(\frac{a_4 x - a_2}{a_1 - a_3 x} \right)$$

Если $D > 0$, то $K^{\pm 1} P^{\pm} = P^{\pm} K^{\pm 1}$, если $D < 0$, то $K^{\pm 1} P^{\pm} = P^{\mp} K^{\pm 1}$.

Пусть, например, $D > 0$, тогда оператор

$$M_2 \Psi = (1 - \exp[i\alpha\varphi(t)]) P^+ \Psi - \\ - \exp[i\alpha\varphi(t)] \left(\frac{\varphi(t) - i}{\varphi(t) + i} \right)^n (1 - \exp[-i\beta\varphi(t)]) P^- \Psi,$$

где $\varphi(t) = (a_1 t + a_2)/(a_3 t + a_4)$ подобен оператору M_1 вида (4), $M_1 = K^{-1} M_2 K$. Поэтому все результаты для оператора M_2 очевидным образом вытекают из соответствующих результатов для оператора M_1 .

Аналогичным образом исследуется соответствующий исключительный случай задачи (1) на замкнутом контуре, когда этим контуром является произвольная окружность комплексной плоскости.

Ростовский государственный университет

Поступило
8 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., 1963. ² Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. ³ Б. В. Хведелидзе, Тр. Тбилисск. матем. инст. АН ГрузССР, 23, 3 (1957). ⁴ I. Ts. Gokhberg, I. A. Feldman, Acta sci. mat., Szeged., 30, 3-4, 199 (1969). ⁵ Л. А. Чикин, Уч. зап. Казанск. унив., 113, кн. 10, 57 (1953). ⁶ Ф. Д. Гахов, В. И. Смагина, ДАН, 136, № 6, 1277 (1961).