Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 5

УДК 513.88

МАТЕМАТИКА

В. Н. ДЯТЛОВ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ГРАНИЦЫ ШОКЕ В ПРОСТРАНСТВЕ КАНТОРОВИЧА

(Представлено академиком П. С. Александровым 13 II 1973)

В настоящей заметке строится теория Шоке для вполне линейных операторов со значениями в пространствах Канторовича (K-пространствах). Именно, оказывается, что в терминах упорядоченных пространств можно естественно определить аналог границы Шоке, роль которой играет некоторая компонента, и доказать, что максимальные в упорядоченности Шоке вполне линейные операторы в известном смысле сосредоточены на этой компоненте.

Рассмотрим K-пространство Y, в нем подпространство X с индуцированным отношением порядка и минорирующий конус H в X, содержащий конечные супремумы (конус H называют минорирующим [1], если множество $H_x=\{h\in H{:}h\leqslant x\}$ непусто для любого x из X). Через $\mathrm{co}_H x$ будем обозначать H-выпуклую оболочку x, т. е. $\mathrm{co}_H x=\sup H_x$.

Обозначим через $\mathscr{L}^+(X, Z)$ множество положительных, аддитивных, однородных операторов, действующих из X в K-пространство Z. Введем в $\mathscr{L}^+(X, Z)$ отношение предпорядка $\succ$, порождаемое конусом H, именно, будем считать, что U_1 мажорирует U_2, если $U_1h\geqslant U_2h$ для всех h из H.

Определение 1. Оператор U из $\mathscr{L}^+(X, Z)$ называется максимальным (относительно H), если U — максимальный элемент упорядоченного множества $(\mathscr{L}^+(X, Z), \succ)$.

Известно [1], что максимальными являются те и только те операторы U, для которых при всех x из X справедливо соотношение $Ux=\sup U(H_x)$.

Определение 2. Вполне линейный положительный оператор T, действующий из Y в Z, называется максимальным (относительно H), если его сужение на X максимально.

Заметим, что T максимален в том и только в том случае, если $T(x-\mathrm{co}_H x)=0$ для x из X.

Определение 3. Проектор P в Y называется граничным, если он максимален. Компонента $\{y\in Y{:}\ Py=y\}$ в этом случае называется граничной.

Теорема 1. *В множестве G граничных проекторов существует наибольший элемент (в булевой алгебре проекторов).*

Действительно, имеем $(\sup G)(x-\mathrm{co}_H x)=\sup\limits_{P\in G} P(x-\mathrm{co}_H x)$.

Определение 4. Наибольший граничный проектор называется проектором Шоке, а соответствующая ему компонента — границей Шоке конуса H (относительно X и Y). Эта компонента обозначается $\mathrm{Ch}(H, X, Y)$.

Теорема 2. *Вполне линейный оператор T, действующий из Y в Z, максимален в том и только в том случае, если компонента его существенной положительности содержится в границе Шоке.*

Доказательство можно извлечь из соотношения $T(x-\mathrm{co}_H x)=T\circ P_T(x-\mathrm{co}_H x)$, где P_T — проектор на компоненту существенной положительности [2] оператора T.

Приведем некоторые примеры.

1. Пусть Y — пространство $B(Q)$ ограниченных числовых функций на компакте Q, в качестве X возьмем подпространство $C(Q)$ непрерывных на Q функций. Пусть, далее, H — некоторый конус в $C(Q)$, удовлетворяющий указанным выше условиям. Тогда граница $\mathrm{Ch}(H, C(Q), B(Q))$ совпадает со стандартной границей Шоке $b(H)$ (см., например, ([1, 3])).

2. Пусть μ — положительная бэровская мера на метризуемом компакте Q. Тогда граница Шоке $\mathrm{Ch}(H, C(Q), L_\mu^p(Q))$, где $p\geqslant 1$, есть класс измеримых подмножеств в Q, совпадающих с границей $\mathrm{Ch}(H, C(Q), B(Q))$ с точностью до множества меры ноль.

3. Пусть H — конус в $B(Q)$; в качестве X возьмем $\overline{H-H}$. В этом случае $\mathrm{Ch}(H, \overline{H-H}, B(Q))$ совпадает с границей Шоке в смысле Бобок и Корнеа ([4]).

4. Граница $\mathrm{Ch}(H, X, Y)$ совпадает с Y в том и только в том случае, если H есть супремальный генератор X в смысле Y ([1]).

Замечания. 1) Изложенную схему с некоторыми изменениями и условиями на H, X, Y можно провести, рассматривая K_σ-пространство Y.

2) В заметке была рассмотрена следующая ситуация:

$$\begin{tikzcd} H \subset X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "U"'] & & Y \arrow[dl, "T"] \\ & Z & \end{tikzcd},$$

где i — оператор тождественного вложения. Можно получить аналогичные результаты, если i заменить на произвольный положительный оператор, действующий из X в Y.

3) В определении границы Шоке, как видно, существенно не конкретное строение K-пространства Y, а булева алгебра проекторов в нем, иначе, база этого K-пространства. Тем самым аналогичное понятие границы можно ввести на произвольной полной булевой алгебре.

Автор искренне благодарен Г. П. Акилову и С. С. Кутателадзе за обсуждение результатов работы.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
7 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов, УМН, 27, 3 (1972). [2] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.— Л., 1950. [3] E. Alfsen, Compact Convex Sets and Boundary Integrals, N. Y., 1971. [4] N. Boboc, A. Cornea, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 12, 4, 471 (1967).