Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 5

УДК 518:519.2 *МАТЕМАТИКА*

В. К. ЗАХАРОВ, О. В. САРМАНОВ

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМАХА ТРАЕКТОРИЙ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА С НЕНУЛЕВЫМ ТРЕНДОМ

(Представлено академиком Ю. В. Прохоровым 8 II 1973)

1. Рассмотрим серию из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха $p={}^1/_2-a/2\sqrt{n}$ и вероятностью неуспеха $q={}^1/_2+a/2\sqrt{n}$, где $a=\text{const}$. Будем считать, что испытания происходят в моменты времени s/n, $s=1, 2, \ldots, n$. Через m_s обозначим число успехов за s испытаний. Точки с координатами $(0, 0)$; $(s/n, 2m_s-s)$, $s=1, 2, \ldots, n$, примем за вершины ломаных — траекторий случайного блуждания.

Легко проверить, что при неограниченном росте n асимптотический закон распределения случайной величины $\eta_{[nT]}=\dfrac{2m_{[nT]}-[nT]}{\sqrt{n}}$, где $0<T\leqslant 1$, а $[nT]$ — целая часть nT, имеет плотность

$$p_a(T, x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-(x+aT)^2/2T} \tag{1}$$

винеровского процесса на отрезке $[0, 1]$ с дисперсией T и трендом $-aT$.

Описанные выше ломаные, *при фиксированном числе успехов* m за серию из n испытаний, начинаются в начале координат и заканчиваются в точке $(1, 2m-n)$. *Размахом* траектории мы называем разность ординат наибольшего максимума и наименьшего минимума траектории, эта разность не менее $|2m-n|$ — детерминированной компоненты размаха. Весь размах Λ мы представляем в виде суммы трех компонент

$$\Lambda=|2m-n|+k+j, \tag{2}$$

где k — максимум, т. е. величина максимального подъема траектории над полосой $[y=0,\ y=2m-n]$, j — минимум, т. е. абсолютная величина наибольшего спуска траектории под эту полосу.

Целью работы является нахождение и исследование асимптотического закона распределения величины $\lambda=\Lambda/\sqrt{n}$ при росте n. Полученный асимптотический закон будет точным законом распределения размаха траекторий винеровского процесса $\xi(T)$ с плотностью (1). При отсутствии тренда, то есть при $a=0$, эта задача различными методами была достаточно полно изучена в [1] и [2].

2. В [1] найдено число траекторий $a_n^m(k, j)$ с фиксированными значениями числа успехов m и величин максимума k и минимума j:

$$a_n^m(k,j)=\sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m}{n-2m+k+j}\right]}\left[C_n^{m_\alpha-k-j+2\alpha}(\alpha+1,0,\alpha+1)-C_n^{m_\alpha-k+2\alpha}(\alpha,1,\alpha)-\right.$$
$$\left.-C_n^{m_\alpha-j+2\alpha}(\alpha,1,\alpha)+C_n^{m_\alpha+2\alpha}(\alpha,0,\alpha)\right], \tag{3}$$

где

$$m_\alpha = m - \alpha(n - 2m + k + j + 2),$$

$$C_n^m(\alpha,\beta,\gamma) = \binom{n}{m} - \binom{n}{m-\alpha} - \binom{n}{m-\alpha-\beta} + \binom{n}{m-\alpha-\beta-\gamma}. \tag{4}$$

Так как все траектории с фиксированным числом успехов m равновероятны, то, обозначив $P(m, k, j)$ вероятность совмещения трех событий: число успехов равно m, максимум равен k, минимум равен j, получим для нее следующее выражение:

$$P(m, k, j) = a_n^m(k, j)\, p^m q^{n-m}. \tag{5}$$

3. Для нахождения трехмерного локального предельного закона распределения компонент размаха (2) правую часть (5) преобразуем с помощью формулы Стирлинга, положив

$$m = np + t\sqrt{npq}, \quad k = \tau_1\sqrt{n}, \quad j = \tau_2\sqrt{n}, \quad p = \frac{1}{2} - \frac{a}{2\sqrt{n}}, \quad q = \frac{1}{2} + \frac{a}{2\sqrt{n}}; \tag{6}$$

тогда равенство (2) для $\lambda = \Lambda/\sqrt{n}$ примет вид

$$\lambda = |a - t| + \tau_1 + \tau_2 + O(1/n). \tag{2'}$$

После элементарных (но довольно громоздких) вычислений получим следующее выражение для плотности асимптотического совместного распределения трех нормированных величин:

$$p(t, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \varphi(|a-t|, \tau_1, \tau_2) =$$

$$= \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} 4e^{(a-t)^2/2} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \Big\{ (\alpha+1)^2 [(\theta_{\alpha a} + 2\tau_1 + 2\tau_2)^2 - 1] \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}(\theta_{\alpha a} + 2\tau_1 + 2\tau_2)^2\right] - \alpha(\alpha+1)[(\theta_{\alpha a} + 2\tau_1)^2 - 1] \times$$

$$\times \exp[-{}^1/_2(\theta_{\alpha a} + 2\tau_1)^2] - \alpha(\alpha+1)[(\theta_{\alpha a} + 2\tau_2)^2 - 1] \exp[-{}^1/_2(\theta_{\alpha a} + 2\tau_2)^2] +$$

$$+ \alpha^2(\theta_{\alpha a}^2 - 1)\exp(-{}^1/_2\theta_{\alpha a}^2)\Big\}, \tag{7}$$

где

$$\theta_{\alpha a} = (1 + 2\alpha)|a - t| + 2\alpha(\tau_1 + \tau_2). \tag{8}$$

Таким образом,

$$\varphi(|a-t|, \tau_1, \tau_2) = \sqrt{2\pi} e^{t^2/2} p(t, \tau_1, \tau_2) \tag{9}$$

есть условная плотность распределения τ_1 и τ_2 при фиксированном t. Положив $\tau_1 + \tau_2 = \tau$, получим условную плотность недетерминированной части размаха по формуле

$$f(|a-t|, \tau) = \int_0^\tau \varphi(|a-t|, \tau_1, \tau - \tau_1)\, d\tau_1. \tag{10}$$

Для нахождения безусловной плотности размаха $\psi_a(\lambda)$ нам осталось проинтегрировать выражение $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} f(|a-t|, \tau)$ при фиксированном значении суммы

$$|a - t| + \tau = \lambda. \tag{11}$$

Итак,

$$\psi_a(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\lambda \left(e^{-\frac{1}{2}(\tau-\lambda+a)^2}+e^{-\frac{1}{2}(\tau-\lambda-a)^2}\right) f(\lambda-\tau,\tau)\,d\tau. \qquad (12)$$

Формула (12) показывает, что $\psi_a(\lambda)$ есть четная функция параметра a, т. е. $\psi_{-a}(\lambda)=\psi_a(\lambda)$.

Выполняя интегрирования в (10) и (12), получим следующий основной результат.

Теорема. *Плотность распределения размаха винеровского процесса с плотностью* (1) *на отрезке времени* $0\leqslant T\leqslant 1$ *выражается формулой*

$$\psi_a(\lambda)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}[Q(\lambda,\alpha,a)+Q(\lambda,\alpha,-a)+Q(\lambda,-1-\alpha,a)+Q(\lambda,-1-\alpha,-a)], \qquad (13)$$

где

$$Q(\lambda,\alpha,a)=\frac{4(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}}\left\{[a^2(1+\alpha)+1+2\alpha]\exp\left[-\frac{2a^2\alpha(\alpha+1)}{(1+2\alpha)^2}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left((1+2\alpha)\lambda-\frac{a}{1+2\alpha}\right)^2\right]-[2(1+\alpha)^2\lambda^2-a(1+\alpha)\lambda+a^2(1+\alpha)+1+2\alpha]\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}(2(1+\alpha)\lambda)^2\right]-a[a(1+\alpha)(1+2\alpha)\lambda+2+3\alpha+a^2(1+\alpha)]\times$$

$$\left.\times\exp[2a(1+\alpha)\lambda]\sqrt{2\pi}[\Phi(a+2(1+\alpha)\lambda)-\Phi(a+(1+2\alpha)\lambda)]\right\}, \qquad (14)$$

а

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-u^2/2}\,du,\quad 0\leqslant\lambda<\infty.$$

При $a=0$ из (14) получается плотность размаха $\psi_0(\lambda)=\psi(\lambda)$, соответствующая нулевому тренду и приведенная в [1].

4. Выведенные формулы позволяют вычислить первые два момента размаха. Если выражение, стоящее в квадратных скобках (13), обозначить $\psi_a(\lambda,\alpha)$, то плотность $\psi_a(\lambda)$ задается быстро сходящимся рядом

$$\psi_a(\lambda)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\psi_a(\lambda,\alpha). \qquad (13')$$

Члены этого ряда обладают следующими интересными свойствами:

$$\int_0^\infty \psi_a(\lambda,0)\,d\lambda=1,\quad \int_0^\infty \psi_a(\lambda,\alpha)\,d\lambda=0,\quad \alpha=1,2,\ldots, \qquad (15)$$

$$\int_0^\infty \lambda\psi_a(\lambda,\alpha)\,d\lambda=0,\quad \alpha=1,2,\ldots \qquad (16)$$

Из (15) следует, что $\int_0^\infty\psi_a(\lambda)\,d\lambda=1$, а (16) позволяет вычислять первый момент по формуле

$$m(a)=\mathbf{M}\lambda=\int_0^\infty \lambda\psi_a(\lambda,0)\,d\lambda=2a\Phi(a)+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-a^2/2}+2\frac{\Phi(a)}{a}. \qquad (17)$$

Второй момент имеет более сложное выражение

$$\mathbf{M}\lambda^2=3+a^2-\frac{1-e^{-a^2/2}}{2a^2}+\frac{e^{-a^2/2}}{2a^2}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1+2\alpha}{\alpha^2(1+\alpha)^2}\left\{\exp\left[\frac{a^2}{2(1+2\alpha)^2}\right]-1\right\}. \tag{18}$$

Легко проверить, что

$$\lim_{a\to 0} m(a)=\frac{4}{\sqrt{2\pi}},$$
$$\lim_{a\to 0}\mathbf{D}\lambda=\lim_{a\to 0}[\mathbf{M}\lambda^2-m^2(a)]=4\ln 2-\frac{8}{\pi}, \tag{19}$$

что совпадает со значениями среднего и дисперсии размаха, приведенными в ([1]) для нулевого тренда.

Заметим еще, что

$$\lim_{a\to\infty}\frac{m(a)}{a}=1,\quad \lim_{a\to\infty}\mathbf{D}\lambda=1, \tag{20}$$

т. е. при больших a можно пользоваться приближенной формулой $m(a)\approx a$, напротив, дисперсия размаха мало изменяется при изменении a, а именно $\mathbf{D}(a)$ монотонно возрастает от $4\ln 2-8/\pi$ до 1.

5. Следует заметить, что моменты размаха проще вычислять в два приема. Сначала находить моменты условного винеровского процесса, плотность размаха которого $f(|a-t|, \tau)$ зависит от абсолютного значения ординаты точки пересечения траектории процесса с прямой $T=1$ и определяется формулой (10), а потом осреднять условные моменты по t.

Согласно (11) условное математическое ожидание размаха равно

$$\mathbf{M}_t\lambda=\mathbf{M}_t\tau+|a-t|, \tag{21}$$

где

$$\mathbf{M}_t\tau=\int_0^{\infty}\tau f(|a-t|,\tau)\,d\tau.$$

Вычисления, выполненные с помощью формулы (7), дают

$$\mathbf{M}_t\tau=e^{(a-t)^2/2}\int_{|a-t|}^{\infty}e^{-u^2/2}\,du, \tag{22}$$

отсюда

$$\mathbf{M}\lambda=\mathbf{M}\mathbf{M}_t\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}(\mathbf{M}_t\tau)\,dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|a-t|e^{-t^2/2}\,dt,$$

причем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|a-t|e^{-t^2/2}\,dt=2a\Phi(a)+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-a^2/2},$$

а $\mathbf{M}\mathbf{M}_t\tau=2\Phi(a)/a$, откуда и следует (17).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
8 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. К. Захаров, О. В. Сарманов, Матем. сборн., 89 (131), № 3 (11), 520 (1972). [2] W. Feller. Ann. Math. Stat., 22, № 3, 427 (1951).