Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 1

УДК 519.2

МАТЕМАТИКА

Е. Б. ДЫНКИН, С. Е. КУЗНЕЦОВ

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ СОПРЯЖЕННЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ КЛАССЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 III 1973)

1. Один из важнейших результатов теории параболических дифференциальных уравнений второго порядка — построение фундаментального решения $p(s, x; t, y)$. Это функция, позволяющая решать задачу Коши одновременно для пары сопряженных уравнений: формула

$$p(s,x;t,f)=\int p(s,x;t,y)f(y)\,dy$$

определяет решение одного из уравнений для $s\in(-\infty, t)$, стремящееся к f при $s\uparrow t$; формула

$$p(s,f;t,y)=\int p(s,x;t,y)f(x)\,dx$$

дает решение другого уравнения для $t\in(s, \infty)$, стремящееся к f при $t\downarrow s$. Предположим, что в правых частях дифференциальных уравнений стоят операторы, переводящие 1 в неотрицательные функции. Тогда с помощью фундаментального решения можно определить для любых s, x вероятностную меру $\mathbf{P}_{s,x}$ в пространстве траекторий, «рождающихся» в момент s в точке x, и меру $\mathbf{P}^{t,y}$ в пространстве траекторий, «умирающих» в момент t в состоянии y. Мы приходим к двум сопряженным классам марковских процессов $\{\mathbf{P}_{s,x}\}$ и $\{\mathbf{P}^{t,y}\}$, обладающих рядом свойств регулярности (непрерывность траекторий, строгая марковость и др.).

Наша цель — построить аналогичную пару регулярных классов, отправляясь от произвольного марковского процесса $(x_t, \mathbf{P})$, точнее от системы его двумерных распределений. Единственное требование, которое приходится дополнительно наложить, это требование абсолютной непрерывности двумерных распределений относительно произведения соответствующих одномерных распределений. Вся предлагаемая теория симметрична относительно обращения времени, она строится в терминах измеримых структур (без введения топологии), в частности, в этих терминах дается определение регулярных классов марковских процессов.

2. Пусть каждому t из интервала Δ сопоставлена точка x_t из некоторого множества E_t. Тогда мы говорим, что x_t — траектория в пространстве состояний E_t. Удобно ввести два вспомогательных состояния a и b и доопределить x_t, считая, что $x_t=a$ при $t<\Delta$ и $x_t=b$ при $t>\Delta$. Случайный процесс — это траектория, зависящая от $\omega\in\Omega$ (интервал Δ также зависит от ω). В пространствах E_t и Ω введены измеримые структуры и при каждом t отображение $x_t(\omega)$ измеримо.

Для каждого числового множества Λ обозначим через $\mathcal{N}(\Lambda)$ минимальную σ-алгебру в пространстве Ω, относительно которой измеримы все отображения x_u, $u\in\Lambda$. σ-алгебры $\mathcal{N}_t=\mathcal{N}[-\infty, t)$ и $\mathcal{N}^t=\mathcal{N}(t, +\infty]$ описывают «прошлое» и «будущее» в момент t. Вероятностная мера P в пространстве Ω определяет марковский процесс, если при $A\in\mathcal{N}_t$, $B\in\mathcal{N}^t$

$$\mathbf{P}(AB|x_t)=\mathbf{P}(A|x_t)\mathbf{P}(B|x_t)\quad \text{п.н.}\quad \mathbf{P}.$$

Если мера $\mathbf{P}$ не вероятностная, но при каждом s меры $\mathbf{P}\{x_s\in\Gamma\}$ σ-конечны, то будем говорить, что $\mathbf{P}$ определяет обобщенный марковский процесс. Меру $\mathbf{P}$, заданную на Ω, можно перенести с помощью отображения $\omega \to x_t(\omega)$ на пространство $\overline{\Omega}$ всех траекторий. Будем говорить, что процесс $(x_t, \mathbf{P})$ канонический, если $\Omega = \overline{\Omega}$ и интервал Δ открыт.

3. Будем предполагать, что E_t — стандартное борелевское пространство ([1]). Каждому обобщенному марковскому процессу $(x_t, \mathbf{P})$ соответствует функция $p(s, A; t, B) = \mathbf{P}\{x_s \in A; x_t \in B\}$, $s<t$.

Теорема 1 (см. ([3])). *Для того, чтобы функция $p(s, A; t, B)$ соответствовала некоторому каноническому обобщенному марковскому процессу $(x_t, \mathbf{P})$, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде*

$$p(s, E_s; t, B) \uparrow m_t(B) \quad \text{при} \quad s \uparrow t. \tag{4}$$

где m_s — σ-конечная мера, а $p(s, x; t, dy)$ — субстохастическое ядро, причем почти наверное по мере m_s

$$\int p(s, x; t, dy)\, p(t, y; u, C) = p(s, x; u, C), \quad s<t<u, \tag{2}$$

$$p(s, x; t_n, E_{t_n}) \to 1 \quad \text{при} \quad t_n \downarrow s, \tag{3}$$

и, кроме того,

$$p(s, E_s; t, B) \uparrow m_t(B) \quad \text{при} \quad s \uparrow t. \tag{4}$$

Процесс $(x_t, \mathbf{P})$ однозначно определяется по $p(s, A; t, B)$. При этом

$$m_s(A) = \lim_{t \downarrow s} p(s, A; t, E_t) = \mathbf{P}\{x_s \in A\},$$

$$p(s, x_s; t, B) = \mathbf{P}\{x_t \in B \mid x_s\} \quad \text{п.н.} \quad P, \quad s \in \Delta.$$

Функции $p(s, A; t, B)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1, мы будем называть определяющими.

4. Для сокращения будем обозначать через $\mu(f, \Gamma)$ интеграл функции f по мере μ по множеству Γ. В случае, когда Γ совпадает со всем пространством, будем писать вместо $\mu(f, \Gamma)$ также μf или $\mu(f)$. Пусть p — какая-нибудь определяющая функция, и пусть $h^s(x)$ и $g_s(x)$, $x \in E_s$,— неотрицательные функции. Положим $p_g^h(s, dx; t, dy) = g_s(x)\, p(s, dx; t, dy)\, h^t(y)$. Если p_1^h (или p_g^1) является определяющей функцией, то мы говорим, что h p-эксцессивна (соответственно g p-коэксцессивна). Назовем эквивалентным p-эксцессивные (p-коэксцессивные) функции, совпадающие при каждом t почти наверно по мере m_t. Каждой паре g, h, где h p-эксцессивна, g p-коэксцессивна, отвечает определяющая функция p_g^h. Соответствующий марковский процесс $(x_t, \mathbf{P}_g^h)$ имеет одномерные распределения $m_s(dx) h^s(x) g_s(x)$. Значение $\mathbf{P}_g^h(\Omega)$ представляет собой билинейную форму относительно g и h. Мы будем обозначать ее через $p\langle g, h\rangle$. (Явное выражение для $p\langle g, h\rangle$ можно найти в ([2])).

5. Теорема 2. *Если определяющая функция $p(s, A; t, B)$ задает в пространстве $E_s \times E_t$ меру, абсолютно непрерывную относительно произведения мер $m_s \times m_t$, то существует измеримая по совокупности x, y функция $p(s, x; t, y)$ такая, что*

$$p(s, dx; t, dy) = m_s(dx)\, p(s, x; t, y)\, m_t(dy), \tag{5}$$

$$\int p(s, x; t, y)\, m_t(dy)\, p(t, y; u, z) = p(s, x; u, z), \quad s<t<u, \quad x \in E_s,\ z \in E_u. \tag{6}$$

Функцию $p(s, x; t, y)$ мы назовем переходной плотностью, отвечающей определяющей функции p.

Доказательство. По теореме Радона — Никодима найдется измеримая функция $p(s, x; t, y)$, удовлетворяющая условию (5). Положим $p(s, x; t, dy) = p(s, x; t, y)\, m_t(dy)$, $p(s, dx; t, y) = m_s(dx)\, p(s, x; t, y)$. Пусть $p(s, x; t; u, z) = \int p(s, x; t, dy)\, p(t, y; u, z)$ и аналогичными формулами определяются $p(s, f; t; u, z)$ и $p(s, x; t; u, f)$, где f — неотрицательная функция. Для каждого рационального r выберем в пространстве E_r опорную систему функций W_r (([1]), п. 3.2). Положим $x \in E_s'$, если $p(s, x; r_1; r_2, f) =$

$=(p(s, x; r_2, f)$ для всех рациональных $s<r_1<r_2$, $f\in W_{r_2}$ и $x\in E_s''$, если $p(r_1, f; r_2; s, x)=p(r_1, f; s, x)$ для всех рациональных $r_1<r_2<s$, $f\in W_{r_1}$. Используя теорему 1, легко проверить, что $m_s(E_s\setminus E_s')=m_s(E_s\setminus E_s'')=0$. При $x\in E_s'$, $y\in E_t''$ положим $\bar p(s, x; t, y)=p(s, x; r; t, y)$, где r — рациональное число из интервала (s, t). Для остальных пар x, y положим $\bar p=0$. Легко проверить, что $\bar p$ не зависит от выбора $r\in(s, t)$ и удовлетворяет условиям теоремы 2. Определяющие функции, удовлетворяющие условиям теоремы 2, будем называть абсолютно непрерывными.

6. Пусть p — абсолютно непрерывная определяющая функция. Рассмотрим множество $\mathscr{K}_t^p$, $t\in[-\infty, \infty]$, всех марковских процессов (не обобщенных) вида $\mathbf{P}_g^1$ таких, что $\mathbf{P}_g^1\{\inf\Delta=t\}=1$. Из результатов ([1]), § 5 и ([2]), § 4 следует, что каждый элемент $\mathbf{P}\in\mathscr{K}_t^p$ однозначно разлагается по крайним точкам множества $\mathscr{K}_t^p$. Совокупность таких крайних точек обозначим E_{t+} и назовем пространством входов. Аналогично строится пространство выходов E_{t-}, $t\in(-\infty, \infty]$. Пространства входов и выходов — стандартные борелевские. Каждой точке $x\in E_{t+}$ соответствует p-коэксцессивная функция, которую мы обозначим $p(t+, x; u, y)$. Формула $m_s(A)\mathbf{P}_{s, A}(\cdot)=\mathbf{P}\{x_s\in A, \cdot\}$ определяет процесс $\mathbf{P}_{s, A}$ из класса $\mathscr{K}_s^p$. Обозначим через $p(s; A; s+, dy)/m_s(A)$ соответствующую ему меру на множестве крайних точек $\mathscr{K}_s^p$, т. е. на E_{s+}. Легко проверить, что функция $p_+(s, x; t, B)=\int p(s+, x; t, y)\times\times p(t, dy; t+, B)$ удовлетворяет условиям (2), (3) для всех $x\in E_{s+}$. Мы построили, таким образом, в пространстве входов E_{s+} нормальную переходную функцию в смысле ([1]), ([4]). Формула

$$p_+(s, dx; t, dy)=p(s, E_s; s+, dx)p_+(s, x; t, dy)$$

задает абсолютно непрерывную определяющую функцию в пространстве входов. Аналогичное построение возможно и для пространства выходов E_{t-}.

7. Отправляясь от построенной нами переходной функции $p_+(s, x; t, B)$ в пространстве входов, определим класс $\mathscr{S}_+$ эксцессивных функций в этом пространстве как класс функций, удовлетворяющих условиям $p_+(s, x; t, \bar h^t)\uparrow\bar h^s(x)$ при $t\downarrow s$, $\bar h^t(x)<\infty$ п.н. $p(t, E_t; t+, dy)$ (ср. ([2])). Все функции из $\mathscr{S}_+$ p_+-эксцессивны в смысле п. 4, и каждый класс эквивалентных p_+-эксцессивных функций содержит единственную функцию из $\mathscr{S}_+$. Формулы

$$\bar h^t(x)=\lim p(t+, x; u, h^u), \qquad h^t(x)=p(t, dx; t+, \bar h^t)/m_t(dx)$$

определяют взаимно однозначное соответствие между функциями $\bar h\in\mathscr{S}_+$ и классами эквивалентных p-эксцессивных функций. Аналогичным образом вводится множество $\mathscr{S}$-эксцессивных функций на пространстве выходов и устанавливается его отображение на множество классов p-коэксцессивных функций.

Пусть $s<t<u$. Положим

$$p(s+, x; u-, z)=\int\limits_{E_t} p(s+, x; t, y)m_t(dy)p(t, y; u-, z)$$

(эта величина не зависит от выбора $t\in(s, u)$).

Теорема 3. *Формула*

$$h^s(x)=\int p(s+, x; u-, y)\,\mu(du, dy)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством функций $h\in\mathscr{S}_+$, нормированных условием $p_+\langle 1, h\rangle=1$, и множеством всех вероятностных мер на пространстве выходов. Формула

$$g_s(x)=\int p(s+, x; u-, y)\,\mu(ds, dx)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством функций $g\in\mathscr{S}_-$, нормированных условием $p_-\langle 1, g\rangle=1$, и множеством всех вероятностных мер на пространстве входов.

8. Из результатов ([4]) вытекает, что переходной функции p_+ отвечает регулярный класс марковских процессов в пространстве входов. Мы не будем воспроизводить здесь полного определения регулярных классов, введенного в ([4]). Отметим только, что основным в этом определении является требование непрерывности справа переходной функции $p_+(s, x_s; t, \Gamma)$ вдоль почти всех траекторий (относительно всех мер $\mathbf{P}$, определяющих данный класс). В ([4]) доказано, что все регулярные классы являются строго марковскими и что для них эксцессивные функции непрерывны справа вдоль траекторий. Аналогичный регулярный класс (с изменением направления отсчета времени) строится в пространстве выходов по p_-.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
8 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, УМН, 26, 4 (1971). [2] Е. Б. Дынкин, УМН, 27, 1 (1972). [3] С. Е. Кузнецов, Теория вероятност. и ее применения, № 3 (1973). [4] Е. Б. Дынкин, УМН, 28, 2 (1973).