

В. И. ДМИТРИЕВ

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МЕТОДОВ КОНСТАНТ И СРЕДНИХ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 21 V 1973)

В ^(1, 2) были определены K - и J -методы построения интерполяционных промежуточных пространств. В настоящей работе доказывается, что эти методы являются двойственными друг к другу.

Основные результаты работы: теорема 1 о сопряженном к банаховой решетке функций со значениями в банаховом пространстве и теоремы 2, 3, описывающие при естественных предположениях сопряженные к пространствам K - и J -методы и содержащие в себе, в частности, теорему Ж. Л. Лионса и Ж. Петре о двойственности для метода средних ⁽⁴⁾.

Н. Ароншайн и Е. Гальярдо первыми установили, что если B_0, B_1 — банахова (интерполяционная) пара, $B_0 \cap B_1 \neq \{0\}$ плотно в B_0 и в B_1 , то $(B_0 + B_1)^* = B_0^* \cap B_1^*$, $(B_0 \cap B_1)^* = B_0^* + B_1^*$, где звездочка означает «топологическое сопряженное», а равенство — изометрический изоморфизм ⁽¹⁾.

Пусть R — множество $\{1, 2, 3, \dots\}$, μ — мера на R , $\mu_n = \mu(\{n\})$, $0 < \mu_n < \infty$, $n = 1, 2, \dots$. Вещественная функциональная банахова решетка (ф.б.р.) E на (R, μ) называется правильной, если E содержит положительную всюду (последовательность) функцию (в силу чего ассоциированное с E пространство E' линейно и изометрично вложено в E^*) и E' совпадает с E^* ⁽³⁾.

Для ф.б.р. E и банахова пространства A через $E(A)$ обозначается совокупность всех A -значных функций (т. е. в данном случае последовательностей) $u = (u_1, u_2, \dots)$ таких, что $(\|u_1\|_A, \|u_2\|_A, \dots) \in E$; $E(A)$ — банахово пространство по норме $\|u\|_{E(A)} = \|(\|u_1\|_A, \|u_2\|_A, \dots)\|_E$.

Напомним, что метод констант (K -метод) построения интерполяционных пространств ⁽²⁾ состоит в том, что банаховой паре A_0, A_1 и двум ф.б.р. E_0, E_1 на (R, μ) , $E_0 + E_1 \ni e$, $e = (1, 1, \dots)$, сопоставляется сумма $E_0(A_0) + E_1(A_1)$, в которой выделяется замкнутое подпространство постоянных функций (отождествляемых с их значениями) $(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K$, оно и будет банаховым интерполяционным пространством K -метода. Метод средних (J -метод) построения интерполяционных пространств ⁽²⁾ состоит в том, что банаховой паре A_0, A_1 и двум ф.б.р. E_0, E_1 на (R, μ) , $E_0' + E_1' \ni e$, $E_0 \cap E_1 \neq \{0\}$, сопоставляется пересечение $E_0(A_0) \cap E_1(A_1)$ и линейный оператор $J: u \mapsto$

$\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mu_n$, непрерывный из $E_0(A_0) \cap E_1(A_1)$ в $A_0 + A_1$; фактор-пространство

$E_0(A_0) \cap E_1(A_1) / J^{-1}(0)$ (отождествляемое с пространством значений оператора J) обозначается через $(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^J$; оно и будет банаховым интерполяционным пространством J -метода.

Лемма 1. Множество всех простых функций из правильной ф.б.р. E всюду плотно в E .

Доказательство. Для $\varphi \in E$ найдем последовательность простых функций φ_n таких, что $\varphi_n \rightarrow \varphi$ на R и $|\varphi_n| \uparrow |\varphi|$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в топологии $\sigma(E, E')$, совпадающей в силу правильности E с $\sigma(E, E^*)$. Согласно одной теореме Мазура существует последовательность выпуклых комбинаций функций φ_n , которая сильно сходится в E к φ .

Из леммы 1 вытекает

Лемма 2. Если E — правильная ф.б.р. на (R, μ) , A — банахово пространство, то множество A -значных финитных на R функций плотно в $E(A)$.

Далее, верна

Теорема 1.* Если E — правильная ф.б.р. на (R, μ) , а A — банахово пространство, то $[E(A)]^*$ изометрически изоморфно $E'(A^*)$.

Доказательство. Пусть $u^* \in [E(A)]^*$. Взяв $x \in A$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots) \in E$ и положив $\varphi x = (\varphi_1 x, \varphi_2 x, \dots) \in E(A)$, имеем $|\langle \varphi x, u^* \rangle| \leq \|x\|_A \|u^*\|_{[E(A)]^*} \|\varphi\|_E$. Так как E — правильная ф.б.р., то для каждого фиксированного x найдется единственный элемент $\varphi'(x) = (\varphi'_1(x), \varphi'_2(x), \dots)$ пространства E' такой,

что $\langle \varphi x, u^* \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \varphi'_n(x) \mu_n$. Определим на A функционалы u_n^* равенствами

$\langle x, u_n^* \rangle = \varphi'_n(x)$, $n=1, 2, \dots$. Ясно, что u_n^* линейны и для всякой функции $u = (u_1, \dots, u_N, 0, 0, \dots) \in E(A)$ выполняется равенство $\langle u, u^* \rangle =$

$= \sum_{n=1}^N \langle u_n, u_n^* \rangle \mu_n$. Следовательно, $\|\varphi\|_E \|u^*\|_{[E(A)]^*} \geq \sum_{n=1}^N \varphi_n \|u_n^*\|_{A^*} \mu_n$, $0 \leq \varphi \in E$,

$N=1, 2, \dots$. Таким образом, $tu^* = (u_1^*, u_2^*, \dots)$ принадлежит $E'(A^*)$ и $\|u^*\|_{[E(A)]^*} \geq \|tu^*\|_{E'(A^*)}$. Далее, линейный функционал на $E(A)$, определенный

выражением $\sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, u_n^* \rangle \mu_n$, $u = (u_1, u_2, \dots) \in E(A)$, непрерывен и совпадает на множестве A -значных финитных функций с u^* , т. е. (по лемме 2) и всюду $\langle u, u^* \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, u_n^* \rangle \mu_n$. Теперь легко видеть, что оператор t

осуществляет между $[E(A)]^*$ и $E'(A^*)$ изометрический изоморфизм, ибо

$|\langle u, u^* \rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_A \|u_n^*\|_{A^*} \mu_n \leq \|u\|_{E(A)} \|tu^*\|_{E'(A^*)}$, т. е. $\|u^*\|_{[E(A)]^*} \leq \|tu^*\|_{E'(A^*)}$.

Лемма 3. Если E_0, E_1 — две правильные ф.б.р. на (R, μ) , A_0, A_1 — банахова пара, $A_0 \cap A_1$ плотно в A_0 и в A_1 , то множество $A_0 \cap A_1$ -значных финитных на R функций плотно в $E_0(A_0)$ и в $E_1(A_1)$.

Следствие. $E_0(A_0) \cap E_1(A_1)$ плотно в $E_0(A_0)$ и в $E_1(A_1)$.

Лемма 4. В предположениях леммы 3 пространство $[E_0(A_0) + E_1(A_1)]^*$ изометрически изоморфно пространству $E_0'(A_0^*) \cap E_1'(A_1^*)$.

Доказательство. По теореме Ароншайна — Гальярдо $[E_0(A_0) + E_1(A_1)]^* = [E_0(A_0)]^* \cap [E_1(A_1)]^*$. Пусть $\tau_i: [E_i(A_i)]^* \rightarrow E_i'(A_i^*)$, $i=0, 1$, — оператор изометрического изоморфизма, найденный в теореме 1. Пусть $u^* \in [E_0(A_0)]^* \cap [E_1(A_1)]^*$, $\tau_i u^* = (u_{i1}^*, u_{i2}^*, \dots)$. Тогда при $u = (u_1, u_2, \dots) \in$

$\in E_0(A_0) \cap E_1(A_1)$ имеем $\langle u, u^* \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, u_{0n}^* \rangle \mu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, u_{1n}^* \rangle \mu_n$, откуда

$u_{0n}^* = u_{1n}^*$ на $A_0 \cap A_1$. Обозначим через u_n^* функционал из $(A_0 \cap A_1)^*$, совпадающий на $A_0 \cap A_1$ с $u_{0n}^* = u_{1n}^*$. Ясно, что u_n^* непрерывен на $A_0 \cap A_1$ в норме пространства $A_0 + A_1$ и, следовательно, единственным образом продолжается до функционала из $(A_0 + A_1)^*$. Это продолжение мы снова обозначим u_n^* .

Сужение u_n^* на A_i совпадает, очевидно, с u_{in}^* , $i=0, 1$. Поэтому $(\|u_{i1}^*\|_{A_i^*}, \|u_{i2}^*\|_{A_i^*}, \dots) \in E_i'$, т. е. $(u_{i1}^*, u_{i2}^*, \dots)$ — точка пространства $E_0'(A_0^*) \cap E_1'(A_1^*)$.

Кроме того, $\langle u, u^* \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, u_n^* \rangle \mu_n$. Теперь понятно, что оператор, осуществляющий требуемый изометрический изоморфизм, можно определить равенством $tu^* = (u_1^*, u_2^*, \dots)$.

Лемма 5. Если E_0, E_1 — две ф.б.р. на (R, μ) , $E_0 + E_1 \ni e$, $E_i \not\ni e$, $i=0, 1$, A_0, A_1 — банахова пара, то $A_0 \cap A_1$ плотно в $(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K$.

Теорема 2. Пусть E_0, E_1 — две правильные ф.б.р. на (R, μ) , $E_0 + E_1 \ni e$, $E_i \not\ni e$, $i=0, 1$, пересечение $A_0 \cap A_1$ плотно в каждом из пространств банахо-

* Утверждение теоремы получено и в ⁽⁵⁾ при дополнительных ограничениях на E .

вой пары A_0, A_1 . Тогда пространство $[(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K]^*$ изометрически изоморфно пространству $(A_0^*, A_1^*)_{E'_0, E'_1}^J$.

Доказательство. Сопряженное к $(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K$ изометрически изоморфно фактор-пространству $[E_0(A_0) + E_1(A_1)] / [(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K]^\perp$, где аннулятор берется в $[E_0(A_0) + E_1(A_1)]^*$. По лемме 4 получаем, что $[(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K]^*$ изометрически изоморфно пространству $E'_0(A_0^*) \cap E'_1(A_1^*) / [(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K]^\perp$, где аннулятор берется в $E'_0(A_0^*) \cap E'_1(A_1^*)$. Для доказательства теоремы достаточно проверить справедливость равенства $[(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K]^\perp = J^{-1}(0)$, где J — интеграл в $A_0^* + A_1^*$ от функций из $E'_0(A_0^*) \cap E'_1(A_1^*)$ по (R, μ) .

Пусть $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots) \in E'_0(A_0^*) \cap E'_1(A_1^*)$ и $\langle u, u^* \rangle = 0$ при $u \in (A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K$. Возьмем, в частности, $u = (x, x, \dots)$, $x \in A_0 \cap A_1$, тогда

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n^* \rangle \mu_n = \langle x, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^* \mu_n \rangle, \text{ т. е. } \sum_{n=1}^{\infty} u_n^* \mu_n = 0 \text{ и } u^* \in J^{-1}(0). \text{ Обратно,}$$

пусть $u^* \in J^{-1}(0)$, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^* \mu_n$ абсолютно сходится в $A_0^* + A_1^*$ к нулю.

Тогда при $u = (x, x, \dots)$, $x \in A_0 \cap A_1$, имеем $\langle u, u^* \rangle = 0$. С учетом леммы 5 получаем, что $u^* \in [(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K]^\perp$.

Лемма 6. В предположениях леммы 3 пространство $[E_0(A_0) \cap E_1(A_1)]^*$ изометрически изоморфно пространству $E'_0(A_0^*) + E'_1(A_1^*)$.

Теорема 3. Пусть E_0, E_1 — две правильные ф.б.р. на (R, μ) , E'_0, E'_1 также правильны, $E'_0 + E'_1 \ni e$, $E'_i \not\ni e$, $i=0, 1$, A_0, A_1 — банахова пара, $A_0 \cap A_1$ плотно в A_0 и в A_1 .

Тогда пространство $[(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^J]^*$ изометрически изоморфно пространству $(A_0^*, A_1^*)_{E'_0, E'_1}^K$.

Доказательство. Сопряженное к $(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^J$ изометрически изоморфно $[J^{-1}(0)]^\perp$, где J — интеграл в $A_0 + A_1$ от функций из $E_0(A_0) \cap E_1(A_1)$ по (R, μ) , а аннулятор берется в $[E_0(A_0) \cap E_1(A_1)]^*$, т. е. согласно лемме 6 в $E'_0(A_0^*) + E'_1(A_1^*)$. Для доказательства теоремы достаточно проверить справедливость равенства $[J^{-1}(0)]^\perp = (A_0^*, A_1^*)_{E'_0, E'_1}^K$.

При $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots) \in [J^{-1}(0)]^\perp$, $u = (u_1, u_2, \dots) \in J^{-1}(0)$ имеем $\langle u, u^* \rangle = 0$, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, u_n^* \rangle \mu_n = 0$, откуда вытекает, что $u_n^* = u_{n+1}^*$ (положим,

например, $u_n = x$, $u_{n+1} = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} x$, $x \in A_0 \cap A_1$, $u_m = 0$ при $m \neq n, n+1$), $n=1, 2, \dots$,

т. е. $u^* \in (A_0^*, A_1^*)_{E'_0, E'_1}^K$. Обратно, пусть $u^* = (x^*, x^*, \dots)$, $x^* \in A_0^* \cap A_1^* = (A_0 + A_1)^*$, $u \in J^{-1}(0)$. Тогда $\langle u, u^* \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, x^* \rangle \mu_n = \langle \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mu_n, x^* \rangle = 0$. Из

леммы 5 легко вывести, что множество функций $u^* = (x^*, x^*, \dots)$ с $x^* \in A_0^* \cap A_1^*$ плотно в $(A_0^*, A_1^*)_{E'_0, E'_1}^K$. Из непрерывности билинейной формы $\langle u, u^* \rangle$ на $[E_0(A_0) \cap E_1(A_1)] \times [E'_0(A_0^*) + E'_1(A_1^*)]$ следует, что $(A_0^*, A_1^*)_{E'_0, E'_1}^K \subset [J^{-1}(0)]^\perp$.

В заключение автор выражает благодарность С. Г. Крейну за постановку задачи и руководство работой.

Поступило
16 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ N. Aronszajn, E. Gagliardo, Ann. Mat. Pure Appl. (4), 68, 51 (1965).
² В. И. Дмитриев, ДАН, 198, № 4, 747 (1971). ³ С. Г. Крейн и др., Функциональный анализ, «Наука», 1972. ⁴ J. L. Lions, J. Peetre, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 19, 5, 5 (1964). ⁵ N. E. Gretsky, J. J. Uhl jr., Trans. Am. Math. Soc., 167, 2 (1972).