

В. А. ЕФРЕМОВИЧ, В. С. ТИХОМИРОВА

ОБЪЕМЫ И ЕМКОСТИ В ГЕОМЕТРИИ БЛИЗОСТИ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 4 V 1973)

Здесь изучаются свойства ранее введенных авторами инвариантов близости.

1. δ -Объем. Это обобщение объемного инварианта ⁽¹⁾. Обозначим M_α и назовем α -вместимостью вполне ограниченного множества M , лежащего в геодезическом пространстве ⁽²⁾, максимальное число точек, вмещающихся в M так, что расстояние между любыми двумя из них не меньше $\alpha > 0$. Всюду в дальнейшем рассматриваются геодезические пространства R , удовлетворяющие следующему условию — аналогу условия А. Шварца ⁽³⁾: для любых $\alpha > 0$, $r > 0$ α -вместимость шара радиуса r ограничена сверху константой $B = B(r, \alpha)$ (существенно, что B не зависит от положения центра шара).

а) Для $\alpha < \beta$ справедливо неравенство (p — положительная константа)

$$M_p \leq M_\alpha \leq p M_\beta. \quad (1)$$

Покроем M шарами радиуса β , для этого, конечно, достаточно M_β шаров, α -вместимость каждого не превосходит $p = B(\beta, \alpha)$.

б) Если f — эквиморфизм пространства R в R_1 , то α -вместимости $M \subset R$ и $M' = f(M)$ удовлетворяют неравенству

$$q^{-1} M_\alpha' \leq M_\alpha \leq q M_\alpha', \quad (2)$$

$q > 0$ — некоторая константа.

Действительно, известно, ⁽⁴⁾, что при эквиморфизме f для любого $\alpha > 0$ найдется $C = C(\alpha)$ такое, что $C^{-1} \leq \rho(f(x), f(y)) / \rho(x, y) \leq C$, как только расстояния $\rho(x, y) \geq \alpha$ или $\rho(f(x), f(y)) \geq \alpha$. Так как M покрывается M_α шарами радиуса α , то M' покрывается M_α шарами радиуса $C\alpha$. Если q_1 — максимальная α -вместимость шара радиуса $C\alpha$ в R_1 , то $M_\alpha' \leq q_1 M_\alpha$. Аналогично $M_\alpha \leq q_2 M_\alpha'$, где $q_2 = B(C\alpha, \alpha)$ в R . При $q = \max(q_1, q_2)$ выполняется (2).

Дадим определение δ -объема неограниченного множества $N \subset R$. Взяв произвольную точку $o \in R$, рассмотрим α -вместимость $n_\alpha(r)$ пересечения $D_r \cap N$, где D_r — шар радиуса r с центром в o . Порядок роста ⁽¹⁾ функции $n_\alpha(r)$, как легко видеть, не зависит от выбора точки o и в силу (1) не зависит от α . Его и назовем δ -объемом N и обозначим $|N|$.

Теорема 1. δ -Объем — инвариант эквиморфизмов.

Пусть $f: R \rightarrow R_1$ — эквиморфизм, $o' = f(o)$, $N' = f(N)$, $D_1(r)$ — шар радиуса r в R_1 с центром в o' . Для $r \geq \alpha$ получим $D_1(C^{-1}r) \cap N' \subset f(D(r) \cap N) \subset D_1(Cr) \cap N'$. Обозначив n_α' и $n_{1\alpha}(r)$ α -вместимость $f(D(r) \cap N)$ и $D_1(r) \cap N'$ соответственно, в силу (2) будем иметь $q^{-1} n_{1\alpha}(C^{-1}r) \leq q^{-1} \cdot n_\alpha' \leq n_\alpha(r) \leq q n_{1\alpha}(Cr)$, а отсюда $\pi n_\alpha(r) = \pi n_{1\alpha}(r)$. (Здесь и в дальнейшем $\pi f(r)$ — порядок роста функции $\phi(r)$.)

2. «Объем» бесконечно удаленных множеств. В этом пункте рассматриваются многообразия R^n с бесконечно удаленной сферой U и их стабильные отображения ⁽⁵⁾. Бесконечно удаленная сфера (или сфера направлений) — это множество бесконечно удаленных точек всех прямых лучей, причем две бесконечно удаленные точки считаются

совпадающими, если порождающие их лучи ограниченно отклоняются один от другого.

Пусть $A \subset U$ и $\kappa(A)$ — конус, построенный абстрактно на A (в простейшем случае, когда A — k -мерный симплекс, $\kappa(A)$ — просто $(k+1)$ -мерный симплекс с $(k+2)$ -й вершиной κ). Если φ — гомеоморфизм конуса $\kappa(A)$ в $\tilde{R}^n = R^n \cup U$, тождественный на A , то $|\varphi(\kappa(A))|$, вообще говоря, зависит от φ . Нижнюю грань $|\varphi(\kappa(A))|$ при всевозможных φ назовем объемом A и обозначим $|A|$; эта нижняя грань может и не принадлежать решетке всех порядков роста, она будет элементом ее дедекиндова пополнения с помощью сечений⁽⁶⁾. Легко видеть, что $|A|$ — инвариант стабильных отображений.

Пример. Прямое произведение $H^2 \times E^1$ плоскости Лобачевского H^2 на прямую E^1 . Это многообразие, будучи пополнено бесконечно удаленной сферой U , гомеоморфно шару D^3 . Меридианом сферы U служит $u \times E^1$, где u — произвольная бесконечно удаленная точка H^2 . Все прямые $a \times E^1$, $a \in H^2$, имеют общую пару бесконечно удаленных точек — полюсы N и S . Если g — прямая из H^2 , то $g \times E^1$ имеет метрику евклидовой плоскости.

а) При стабильных эквиморфизмах $H^2 \times E^1$ на себя каждый меридиан переходит в меридиан. Действительно, для любой дуги A меридиана объем $|A| = 2$ (т. е. порядку роста квадратичной функции). Если бы образ $A' = f(A)$ не помещался на меридиане, то $|A'|$ был бы равен порядку экспоненциальной функции, что противоречило бы инвариантности «объема».

б) При любом эквиморфизме (вообще говоря, не стабильном) полюс переходит в полюс. Заметим, что прямолинейный луч Γ может перейти в линию Γ' , имеющую бесконечно много предельных точек на U , однако все они должны принадлежать одному меридиану, иначе δ -объем $|\Gamma'|$ был бы равен порядку экспоненциальной функции, в то время как $|\Gamma| = 1$. Точно так же, если Δ — сектор, опирающийся на дугу меридиана, то его образ Δ' должен все свои бесконечно удаленные предельные точки сосредоточить на одном меридиане ($|\Delta| = 2 < \pi(e^x)$). Пусть σ и σ_1 — дуги двух меридианов, начинающиеся в N , Δ и Δ_1 — секторы, опирающиеся на них, $\Gamma = \Delta \cap \Delta_1$ — луч, идущий в N . Все бесконечно удаленные предельные точки Δ' принадлежат одному меридиану, то же и для Δ_1' . Меняя Δ , получим, что луч $\Gamma = \Delta \cap \Delta_1$ перейдет в линию, имеющую единственную бесконечно удаленную точку, лежащую на всех меридианах, именно полюс N или S .

3. k -Емкость пространства. Пусть Z — носитель сингулярного k -мерного цикла, гомологичного нулю в R , Z_α — его α -вместимость. Из цепей, аннулирующих Z , выберем цепь, носитель которой X имеет минимальную α -вместимость. Рассмотрим функцию $\varphi_\alpha(t) = \sup_{Z_\alpha \leq t} X_\alpha$, где $\sup$ берется

по всем k -циклам Z , для которых $Z_\alpha \leq t$. Будем предполагать, что $\varphi_\alpha(t) < +\infty$ для $t > 0$. (Конечно, легко привести пример, когда это не так, но нас интересуют именно те пространства, для которых это условие выполняется.) $\varphi_\alpha(t)$ назовем k -емкостью пространства R и обозначим $\chi^k(R)$.

Теорема 2. $\chi^k = \pi\varphi_\alpha(t)$ не зависит от α .

Пусть $\alpha < \beta$. Обозначим через Y носитель той аннулирующей цепи, для которой β -вместимость Y_β имеет минимальное значение. Тогда $Y_\beta \leq X_\beta \leq X_\alpha$ и $Z_\beta \leq t \Rightarrow Z_\alpha \leq pt$ (см. (1)), поэтому $\varphi_\beta(t) = \sup_{Z_\beta \leq t} Y_\beta \leq \sup_{Z_\alpha \leq pt} X_\alpha = \varphi_\alpha(pt)$, т. е.

$\pi\varphi_\beta \leq \pi\varphi_\alpha$; с другой стороны, $X_\alpha \leq Y_\alpha \leq pY_\beta$ и $Z_\alpha \leq t \Rightarrow Z_\beta \leq t$, поэтому

$$\varphi_\alpha(t) = \sup_{Z_\alpha \leq t} X_\alpha \leq p \sup_{Z_\beta \leq t} Y_\beta = p\varphi_\beta(t), \text{ т. е. } \pi\varphi_\alpha \leq \pi\varphi_\beta.$$

Итак, $\pi\varphi_\alpha = \pi\varphi_\beta$.

Теорема 3. $\chi^k(R)$ — инвариант эквиморфизмов.

Пусть f — эквиморфизм R на R' . Сохраняя прежние обозначения и обозначая, кроме того, штрихом образ точки и множества, заметим, что X' может не давать минимума α -вместимости для аннулирующих Z' цепей.

Пусть этот минимум достигается на Y' , $Y=f^{-1}(Y')$. Тогда $X_\alpha \leq Y_\alpha$ и (см. (2)) $q^{-1}X_\alpha \leq q^{-1}Y_\alpha \leq Y'_\alpha$, а так как $Z_\alpha \leq t \Rightarrow Z'_\alpha \leq qt$, имеем $\varphi_\alpha(t) = \sup_{Z_\alpha \leq t} X_\alpha \leq q \sup_{Z'_\alpha \leq qt} Y'_\alpha = q\varphi'_\alpha(qt)$, где φ'_α — соответствующая функция для R' .

Итак, $\chi^h(R) \leq \chi^h(R')$. Таким же образом, в силу равноправия R и R' , $\chi^h(R') \leq \chi^h(R)$.

Пример. Орициклический карман ⁽⁷⁾ (т. е. универсальная накрывающая псевдосферы или два экземпляра внутренней области орицикла, склеенных по границе) не эквиморфен плоскости Лобачевского H^2 , хотя их Δ -объемы одинаковы. Действительно, χ^1 для кармана равна $\text{lexp } t$, а $\chi^1(H^2) = 1$.

4. k -Емкость пути. Пусть в пространстве R задан путь $W: x=x(t)$, т. е. непрерывное отображение прямолинейного луча $t \geq 0$. Рассмотрим всевозможные k -мерные гомологичные нулю циклы, носители которых Z проходят через точки $x(\tau)$, $t \leq \tau < +\infty$, и имеют α -вместимости $Z_\alpha \leq at$, a — некоторая константа. Для каждого из них строим аннулирующую цепь, минимальную по α -вместимости X_α ее носителя X . Обозначим верхнюю грань множества чисел X_α по всем рассматриваемым Z через $\mu_{\alpha, a}(t)$: $\mu_{\alpha, a}(t) = \sup X_\alpha$. (Как и в п. 3, предполагаем, что $\mu_{\alpha, a}(t) < +\infty$.)

При $a_1 < a_2$ имеем $\mu_{a_1, \alpha}(t) \leq \mu_{a_2, \alpha}(t)$. Нижнюю грань порядков роста функций $\mu_{\alpha, a}(t)$ при фиксированном α и всевозможных $a > 0$ обозначим $\gamma^h(w)$ и назовем k -емкостью пути w . Как и в п. 2, эта нижняя грань принадлежит, вообще говоря, пополнению решетки порядков роста.

Теорема 4. k -Емкость пути не зависит от α .

При $\alpha < \beta$, следуя доказательству теоремы 2, имеем $\mu_{\alpha, \beta}(t) = \sup_{Z_\beta \leq at} Y_\beta \leq \sup_{Z_\alpha \leq apt} X_\alpha = \mu_{ap, \alpha}(t)$, а также $\mu_{\alpha, \alpha}(t) = \sup_{Z_\alpha \leq at} X_\alpha \leq p \sup_{Z_\beta \leq at} Y_\beta = p\mu_{\alpha, \beta}(t)$.

Итак, $p^{-1}\mu_{\alpha, \alpha}(t) \leq \mu_{\alpha, \beta}(t) \leq \mu_{ap, \alpha}(t)$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 5. k -Емкость пути — инвариант эквиморфизмов.

Пусть f — эквиморфизм пространства R на R' . $w: x=x(t)$ — путь на R , $w': x'=x'(t)$ — его образ на R' , $f(x(t))=x'(t)$.

Следуя доказательству теоремы 3, имеем $\mu_{\alpha, \alpha}(t) = \sup_{Z_\alpha \leq at} X_\alpha \leq q \sup_{Z'_\alpha \leq aqt} Y'_\alpha = q\mu_{aq, \alpha'}(t)$.

Итак, $\gamma^h(w) \leq \gamma^h(w')$. В силу равноправия R и R' имеем противоположное неравенство.

5. Емкость путей в многообразиях сферической симметрии. Пусть R^n — n -мерное риманово многообразие с элементом длины $ds^2 = d\rho^2 + F^2(\rho) d\sigma^2$, где ρ, σ — сферические координаты (σ принадлежит сфере Σ^{n-1} : $F(\rho) = 1$; $d\sigma$ — проекция элемента ds на Σ^{n-1}). Рассмотрим на R^n путь $w: x=x(t)$ такой, что

$$c^{-1}t \leq \rho(t) \leq ct, \quad t_0 \leq t < +\infty, \quad (3)$$

где $\rho(t)$ — первая координата точки $x(t)$, $c > 1$ — некоторая константа. Какой-нибудь координатный луч $\sigma = \sigma_0$ снабдим естественной параметризацией $t = \rho$, превратив его в путь $\bar{w}: \bar{x} = \bar{x}(t)$. Обозначим введенные в п. 4 функции для путей w и $\bar{w}$ через μ и $\bar{\mu}$ соответственно.

Теорема 6. k -Емкости путей w и $\bar{w}$ равны.

Заметим, что для любого множества M , содержащего точку (ρ, σ) , найдется изометричное ему множество, содержащее точку (ρ, σ_0) ; поэтому каждому $Z \ni x(\tau)$, $x(\tau) = (\rho(\tau), \sigma(\tau))$ соответствует $\bar{Z} \ni \bar{x}(\tau)$ такой, что $Z_\alpha = \bar{Z}_\alpha$, $X_\alpha = \bar{X}_\alpha$. Из этого обстоятельства и неравенства (3) следует

$$\mu_{1, \alpha}(t) = \sup_{\substack{Z_\alpha \leq t \\ x(\tau) \in Z, t \leq \tau < \infty}} X_\alpha \geq \sup_{\substack{\bar{Z}_\alpha \leq (1/c)ct \\ \bar{x}(\tau) \in \bar{Z}, ct \leq \tau < \infty}} \bar{X}_\alpha = \bar{\mu}_{c^{-1}, \alpha}(ct).$$

Итак, $\bar{\mu}_{c^{-1}, \alpha}(ct) \leq \mu_{1, \alpha}(t)$. Таким же образом получаем $\bar{\mu}_{c, \alpha}(c^{-1}\tau) \geq \mu_{1, \alpha}(t)$. Из полученного двойного неравенства следует утверждение теоремы.

Следствие 1. Если пути $x_1(t)$ и $x_2(t)$ удовлетворяют условию (3), то их k -емкости совпадают.

Следствие 2. Орициклический карман не эквиморфен никакой поверхности вращения.

Это теорема, доказанная Де-Спиллером (⁷). Для доказательства фиксируем некоторую точку o на граничном орицикле и рассмотрим две линии: ветвь граничного орицикла и ось орицикла, выходящие из точки o . Введем на них параметризации $x_1(t)$ и $x_2(t)$, приняв за параметр t расстояние от соответствующих точек до точки o . Полученные пути обозначим через w_1 и w_2 . Предположим теперь, что наша поверхность эквиморфна некоторой поверхности вращения. Можно считать, что точка o при этом эквиморфизме переходит в центр поверхности вращения. Пусть c^{-1} , c — константы отображения, w_1' и w_2' — образы наших путей. Они удовлетворяют условию (3), следовательно, их k -емкости равны, а значит, равны k -емкости путей w_1 и w_2 . Но $\gamma^1(w_1) = \pi \exp t$, $\gamma^1(w_2) = 1$; итак, $\gamma^1(w_1) > \gamma^1(w_2)$.

Благодарим А. Г. Вайнштейна за ценные критические замечания.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
30 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Ефремович, УМН, 8, 5, 189 (1953). ² В. А. Ефремович, УМН, 4, 2, 178 (1949). ³ А. С. Шварц, Уч. зап. Ивановск. пединст., 5, 9 (1954). ⁴ Е. С. Тихомирова, Изв. АН СССР, сер. матем., 26, 6, 865 (1962). ⁵ В. А. Ефремович, Э. А. Логинов, Е. С. Тихомирова, ДАН, 197, № 1, 25 (1971). ⁶ Г. Биркгоф, Теория структур, М., (1952). ⁷ Д. А. Де-Спиллер, ДАН, 185, № 6, 1219 (1969).