Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 1

УДК 513.88+513.83

МАТЕМАТИКА

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, И. Ф. КУШНИРЧУК

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОПЕРАТОРОВ БЕССЕЛЯ И ЭЙЛЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим операторы Бесселя $B=z^2D^2+zD+z^2I$ и Эйлера $E=z^2D^2+zD$ ($D=d/dz$, I — единичный оператор) в пространствах A_R однозначных аналитических в круге $|z|<R$, $0<R\leqslant+\infty$, функций с топологией компактной сходимости. Известно [1], что цилиндрические функции $J_n(z)$ являются решениями уравнения Бесселя $Bw=n^2w$, т. е. собственными функциями оператора B, которые соответствуют собственным значениям $\lambda_n=n^2$.

В этой заметке устанавливаем, что система функций $\{J_n(z)\}_0^\infty$ образует квазистепенной базис в любом пространстве A_R и при помощи этого факта находим условия разрешимости в A_R неоднородного уравнения Бесселя

$$(B-n^2I)\varphi(z)=f(z) \tag{1}$$

с правой частью $f(z)\in A_R$.

1) На основании матричного описания линейных непрерывных в A_R операторов доказывается

Теорема 1. *Операторы B и E линейно эквивалентны в каждом пространстве A_R, $0<R\leqslant+\infty$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что существует изоморфизм T пространства A_R, который удовлетворяет соотношению

$$BT=TE. \tag{2}$$

Для этой цели достаточно доказать подобие соответствующих в степенном базисе операторам B и E матриц (см. [4]), так как операции умножения на независимую переменную и дифференцирования по ней являются непрерывными в пространстве A_R. При $R=+\infty$ воспользуемся теоремой 4 из [5]: элементы $a_{jk}=1$, $j=k+2$, $k=0, 1, \ldots$, матрицы оператора $B-E$ удовлетворяют неравенствам

$$|a_{jk}|\leqslant\varepsilon_l|\alpha_l-\alpha_k|, \quad j\leqslant l-1; \quad l, k=0, 1, \ldots,$$
$$|a_{lj}|\leqslant\varepsilon_l|\alpha_l-\alpha_k|, \quad k\leqslant l-1; \quad l, j=0, 1, \ldots,$$

с $\varepsilon_l=1/l\to0$ при $l\to\infty$, где $\alpha_k=k^2$, $k=0, 1, \ldots$ В случае конечного R эквивалентность операторов B и E в A_R получается столь же просто, если воспользоваться методами работы [4].

Итак, существует линейный непрерывный в A_R оператор T, удовлетворяющий равенству (2) и имеющий такой же обратный оператор T^{-1}. Заметим еще, что оператор T можно выбрать так, чтобы сохранялись начальные условия

$$|Th(z)|_{z=0}=h(0, \qquad D(Th(z))|_{z=0}=h'(0)$$

для любой функции $h(z)\in A_R$. Найдем элементы матриц этих операторов.

Лемма. *Пусть $[t_{jk}]_0^\infty$ и $[t_{jk}']_0^\infty$ — матрицы операторов T и T^{-1} соответственно. Тогда справедливы следующие формулы:*

$$t_{jk}=\begin{cases} \dfrac{(-1)^l\cdot k!}{2^{2l}\cdot l!\,(k+l)!} & \text{при } j=k+2l, \\ 0 & \text{при } j\neq k+2l, \quad k, l=0, 1, \ldots; \end{cases}$$

$$t'_{jk}=\begin{cases}\dfrac{(k+l-1)!}{2^{2l}\cdot l!\,(k+2l-1)!} & \text{при } j=k+2l,\\ 0 & \text{при } j\neq k+2l, \quad k,l=0,1,\ldots\end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Так как уравнение Бесселя однородно, то в качестве собственных функций оператора B, соответствующих собственным значениям $\lambda_k=k^2$, можно взять функции $\varphi_k(z)=2^k k! J_k(z)$. Обозначим через $\psi_k(z)$ собственные функции оператора E, которые соответствуют тем же собственным значениям λ_k. Они определяются из уравнения Эйлера

$$(E-k^2I)\psi_k(z)=z^2\psi_k''(z)+z\psi_k'-k^2\psi_k(z)=0,$$

решения которого, удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi_k(0)=2^k k! J_k(0)=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & k=1,2,\ldots;\end{cases} \qquad \varphi_k'(z)=\begin{cases}1, & k=1,\ldots,\\ 0, & k=0,2,\ldots,\end{cases}$$

имеют вид $\psi_k(z)=z^k$, $k=0, 1,\ldots$ Из равенства (2) следует, что $BT\psi_k(z)=$ $=TE\psi_k(z)=k^2T\psi_k(z)$, т. е. функции $\varphi_k(z)=T\psi_k(z)$ являются собственными функциями оператора B. Поэтому

$$Tz^k=2^k k! J_k(z)=z^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l k!}{l!\,(k+l)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}, \quad k=0,1,2,\ldots, \tag{4}$$

Отсюда непосредственно получаем формулы (3) для элементов t_{jk} матрицы оператора T, являющейся нижней треугольной. Поэтому и обратная ей матрица T^{-1} также является нижней треугольной; ее элементы t_{jk}', $j\geqslant k$, определяются из следующих систем линейных уравнений:

$$\sum_{l=k}^{m}t_{ml}t'_{lk}=\delta_{m,k}, \quad m=k,\ k+1,\ldots,j$$

($\delta_{m,k}$ — символ Кронекера), которые являются поэлементной записью равенства матриц операторов TT^{-1} и I. Решая эти системы (их определители равны единице), приходим к формулам (3) для элементов t_{jk}' матрицы оператора T^{-1}.

2. На основании формулы (4) получаем очень простое доказательство известной (см. ([1])) теоремы Неймана о разложении любой функции $f(z)\in$ $\in A_R$ в ряд по функциям Бесселя с целыми неотрицательными индексами.

Теорема 2. *Любая функция $f(z)\in A_R$ единственным способом разлагается в ряд вида $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}d_kJ_k(z)$, при этом*

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{k}|d_k|^{1/k}\leqslant\frac{2}{eR}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $f(z)\in A_R$ и $g(z)=T^{-1}f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$, где $c_k=\dfrac{1}{k!}g^{(k)}(0)$, $k=0,1,\ldots$ удовлетворяют условию $\varlimsup\limits_{k\to\infty}|c_k|^{1/k}\leqslant 1/R$. Тогда на основании (4) имеем

$$f(z)=Tg(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kTz^k=\sum_{k=0}^{\infty}d_kJ_k(z),$$

где $d_k=2^k k! c_k$, и поэтому неравенства (5) получаются отсюда очевидным образом.

Теорема 2 показывает, что система функций $\{J_n(z)\}_0^\infty$ образует квазистепенной базис в любом пространстве A_R, $0<R\leqslant+\infty$.

Замечание 1. Укажем другой способ определения элементов t_{jk}' матрицы оператора T^{-1}. Пусть $h(z)=\sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k \in A_R$ и разлагается по цилиндрическим функциям в ряд: $\sum_{k=0}^{\infty} b_k J_k(z)=h(z)$. Тогда (см. ([1])) коэффициенты b_k, $k=0, 1, \ldots$, этого разложения определяются через h_k, $k=0, 1, \ldots$:

$$b_0=h_0, \quad b_k=k\sum_{m=0}^{[k/2]} 2^{k-2m}\frac{(k-m-1)!}{m!}h_{k-2m}, \quad k=1, 2, \ldots \tag{6}$$

Так как $T^{-1}z^k=\sum_{j=0}^{\infty} t_{jk}'z^j$, то

$$T^{-1}h(z)=\sum_{k=0}^{\infty} h_k T^{-1}z^k=\sum_{k=0}^{\infty} h_k\left(\sum_{j=0}^{\infty} t_{jk}'z^j\right)=\sum_{j=0}^{\infty} z^j\left(\sum_{k=0}^{\infty} h_k t_{jk}'\right).$$

С другой стороны,

$$T^{-1}h(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k T^{-1}J_k(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!2^k}\cdot z^k.$$

На основании единственности разложения в степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k t_{jk}'=\frac{b_j}{j!2^j}, \quad j=0, 1, \ldots$$

Подставим сюда выражения (6) для b_k:

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k t_{0k}'=h_0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} h_k t_{jk}'=\frac{1}{(j-1)!}\sum_{m=0}^{[j/2]}\frac{(j-m-1)!}{2^{2m}m!}h_{j-2m}, \quad j=1, 2, \ldots$$

Так как $h(z)$ — произвольная функция из A_R (т. е. коэффициенты h_k произвольны, лишь бы $h(z)\in A_R$), то из этих соотношений следует, что $t_{jk}'=0$ при $j<k$; t_{jk}' — отличны от нуля, когда j и k, $j\geqslant k$,— неотрицательные целые числа одинаковой четности, и выражаются при этом формулами (4).

3. Применим к обеим частям уравнения (2) оператор T^{-1}; учитывая при этом, что $T^{-1}B=ET^{-1}$, получим

$$(E-n^2I)\psi(z)=g(z), \tag{7}$$

где

$$\psi(z)=T^{-1}\varphi(z), \quad g(z)=T^{-1}f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k.$$

Очевидно, что уравнение (2) тогда и только тогда имеет решение $\varphi(z)\in A_R$, когда в этом пространстве уравнение (7) имеет решение $\psi(z)$; при этом $\varphi(z)=T\psi(z)$.

Теорема 3. *Для того чтобы уравнение* (7) *имело аналитическое в круге* $|z|<R$ *решение, необходимо и достаточно, чтобы* $g_n=\frac{1}{n!}g^n(0)=0$. *При этом*

$$\psi(z)=\alpha z_n+\sum_{k\neq 0}\frac{g_k}{k^2-n^2}\cdot z^k, \tag{8}$$

где α *— любое комплексное число.*

Доказательство. Будем искать решение уравнения (7) в виде ряда $\psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k$. Тогда для определения коэффициентов α_k получаем систему $\alpha_k(k^2-n^2)=g_k$, $k=0, 1, \ldots$ Отсюда при $k\neq n$ имеем $\alpha_k=g_k/(k^2-n^2)$.

Если $g_n=0$, то в качестве α_n можно взять любое число α. Поэтому решение уравнения (7) действительно имеет вид (8). И наоборот, если существует решение $\psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k z^k\in A_R$ уравнения (7), то при любом $k=0, 1,\ldots$ должны выполняться равенства $\psi_k(k^2-n^2)=g_k$; откуда при $k=n$ получим, что $g_n=0$.

Заметим еще, что первое слагаемое правой части (8) является общим решением однородного уравнения Эйлера (с $g(z)\equiv 0$), принадлежащим пространству A_R.

Для получения формулы решения уравнения (2) разложим предварительно функцию $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k z^k\in A_R$ в ряд по функциям Бесселя:

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m J_n(z),$$

где согласно (6)

$$a_0=f_0,\quad a_m=m\sum_{s=0}^{[m/2]}2^{m-2s}\frac{(m-s-1)!}{s!}f_{m-2s},\quad m=1, 2, \ldots$$

Тогда

$$g(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m T^{-1}J_m(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{m!\cdot 2^m}\cdot z^m$$

т. е. $g_m=\dfrac{a_m}{m!\cdot 2^m}$ $m=0, 1,\ldots$ Поэтому из теоремы 3 получаем

Следствие. *Для того чтобы уравнение* (2) *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы при* $n=0$, $f_0=0$ *или при* $n=1, 2,\ldots$

$$\sum_{s=0}^{[n/2]}2^{n-2s}\cdot\frac{(n-s-1)!}{s!}\cdot f_{n-2s}=0. \qquad (9)$$

При этом

$$\varphi(z)=\alpha n!\ 2^n\cdot J_n(z)+\sum_{k\neq n}\frac{a_k}{k^2-n^2}\cdot J_k(z).$$

Замечание 2. Условие (9) выполняется, очевидно, тогда, когда коэффициенты f_k разложения правой части $f(z)$ уравнения (2) в ряд Тейлора удовлетворяют равенствам $f_0=f_2=\ldots=f_n=0$ при четном n, или $f_1=f_3=\ldots$ $\ldots=f_n=0$ при нечетном n.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку
Черновицкий государственный
университет

Поступило
19 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, 1, ИЛ, 1949, стр. 1. [2] Н. И. Нагнибида, Сиб. матем. журн., 10, 6, 1422 (1969). [3] Н. И. Нагнибида, Теория функций, Функц. анализ и их приложения, в. 2, 160 (1966). [4] К. М. Фишман, Там же, в. 13, 111 (1971). [5] К. М. Фишман, Тез. докл. Всесоюзн. конфер. по теории функций компл. перем., Харьков, 1971, стр. 220.