

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

А. М. СЕДЛЕЦКИЙ

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ В СРЕДНЕМ ПРОДОЛЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С СОХРАНЕНИЕМ ГЛАДКОСТИ

(Представлено академиком С. М. Никольским 24 I 1973)

Пусть $f \in C[-a, a]$ и удовлетворяет при $x = 0$ соотношению

$$\int f(x+t) d\sigma(t) = 0, \quad \text{var } \sigma < \infty, \quad \sigma = \text{const вне } (-a, a). \quad (1)$$

Периодическим в среднем (п.с.) продолжением f на правую полупрямую назовем функцию (сохраним для нее то же обозначение), которая непрерывна при $x \geq -a$, удовлетворяет уравнению (1) при $x \geq 0$ и совпадает с исходной функцией на $[-a, a]$. Через $\omega(g, \delta; b, c)$ и $V_b^c(g)$ обозначаем соответственно модуль непрерывности и вариацию g на $[b, c]$. Пишем $\omega(g, \delta)$ и $V(g)$, когда $[b, c] = [-a, a]$.

Теорема 1. Пусть имеет место условие (1) при $x = 0$, причем $\sigma(a) - \sigma(a-0) \neq 0$. Тогда f обладает п.с. продолжением на полупрямую $x \geq -a$. При этом:

- 1) $\omega(f, \delta; -a, b) \leq c(b) \omega(f, \delta) \quad \forall b > a$;
- 2) если $V(f) < \infty$, то и $V_{-a}^b(f) < \infty$ для $\forall b > a$, причем $V_{-a}^b(f) \leq c_1(b) V(f)$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность корней функции $L(z) = \int \exp(izt) d\sigma(t)$, m_n — кратность λ_n . Рассмотрим систему

$E_\Lambda = \{\{x^{h-1} e^{i\lambda_n x}\}_{h=1}^{m_n}\}_{n=0}^{\infty}$; через $C_\Lambda[b, c]$ обозначаем замыкание линейной оболочки E_Λ в $C[b, c]$. Дефектом E_Λ в $C[-a, a]$ назовем наименьшее целое число $d = d(E_\Lambda)$, обладающее свойством: система $E_\Lambda \cup \{e^{i\mu_n x}\}_{n=1}^d$ полна в $C[-a, a]$, $\mu_n \notin \Lambda$, $n = 1, 2, \dots, d$. Не оговаривая особо, будем считать, что $\sigma \neq \text{const}$ в сколь угодно малой окрестности точки $t = -a$.

Лемма 1. Если $\sigma(a) - \sigma(a-0) \neq 0$, то $d(E_\Lambda) = 1$.

Условие леммы влечет ⁽¹⁾ неравенство $|L(z)| \geq m > 0$ на некоторой прямой $\text{Im } z = H$. Пусть $d(E_\Lambda) > 1$. Тогда система $E_\Lambda \cup e^{i\mu x}$, $\mu \notin \Lambda$, неполна в $C[-a, a]$; $\exists s(t)$, $V_{-a}^a(s) < \infty$ так, что $G(z) = \int e^{izt} ds(t)$ обращается в нуль в точках $\Lambda \cup \mu$. Значит, $G(z) = (z - \mu)L(z)E(z)$. Ясно, что $h_G(\varphi) \leq a|\sin \varphi|$, и, так как ⁽²⁾ $h_L(\varphi) = a|\sin \varphi|$, то $E(z) \in [1, 0]$. Отсюда $\sup E(z) > 0$ на прямой $\text{Im } z = H$, значит, $\sup |G(z)| = \infty$ на этой прямой, что противоречит тому, что G есть преобразование Фурье — Стильтьеса.

При дополнительных предположениях относительно поведения σ в окрестности $t = -a$ лемма 1 была доказана в ⁽³⁾.

Лемма 2. $\{d(E_\Lambda) = 1\} \cap \{(1) \text{ при } x = 0\} \Rightarrow f \in C_\Lambda[-a, a]$. $d(E_\Lambda) = 1 \Rightarrow \text{codim } C_\Lambda[-a, a] = 1$.

Значит, $\forall$ линейный функционал, аннулирующий E_Λ , представляется функцией $k\sigma(t)$. Благодаря (1) он аннулирует f . По теореме Хана — Банаха $f \in C_\Lambda[-a, a]$.

Доказательство теоремы 1. Существование п.с. продолжения следует из ⁽¹⁾ и лемм 1, 2. Утверждения 1), 2) достаточно доказать для не-

которого $b > a$. Положим $b = a + \alpha$, где $\alpha > 0$ выбрано из условия $V_{a-\alpha}^{a-0}(\sigma) \leq c_0 < 1$ (считаем, что $\sigma(a) - \sigma(a-0) = 1$).

1) Благодаря свойству модуля непрерывности $\omega(g, \delta; a, c) \leq \omega(g, \delta; a, b) + \omega(g, \delta; b, c)$, $a < b < c$, достаточно показать, что $\omega(f, \delta; a, b) \leq c_3(b) \omega(f, \delta)$. При фиксированном $\delta \in (0, \alpha]$ рассмотрим $\omega(f, \delta; a, b) = \sup |f(x_2) - f(x_1)|$, где $\sup$ берется по всем $x_1, x_2 \in [a, b]$, $|x_2 - x_1| \leq \delta$. Эта верхняя грань достигается при некоторых x_1, x_2 . Считаем, что $a \leq x_1 < x_2 \leq a + \alpha$, $x_1 = a + h$, $h \geq 0$, $x_2 = x_1 + \delta$. В соотношении $0 = \int \{f(t+h+\delta) - f(t+h)\} d\sigma(t)$, получающемся из (1), отделим скачок σ в $t = a$, а оставшийся интеграл разобьем на 2: от $(-a)$ до $(a-h-\delta)$ и от $(a-h-\delta)$ до $(a-0)$. Получим

$$\omega(f, \delta; a, b) = |f(x_2) - f(x_1)| \leq c_0 \omega(f, \delta; a, b) + V_{-a}^{a-0}(\sigma) \omega(f, \delta).$$

Так как $c_0 < 1$, то отсюда получается требуемое, причем

$$c_3(b) \leq (1 - c_0)^{-1} V_{-a}^{a-0}(\sigma).$$

2) I шаг. Покажем, что $V_a^b(f) < \infty \Rightarrow V_a^b(f) \leq c_3(b) V(f)$. Положим в (1) $x = h \in [0, \alpha]$:

$$f(a+h) = - \int_{-a}^{a-h} f(t+h) d\sigma(t) - \int_{a-h}^{a-0} f(t+h) d\sigma(t). \quad (2)$$

По известному свойству свертки $V(\alpha * d\beta) \leq V(\alpha) V(\beta)$ из (2) вытекает неравенство $V_a^b(f) \leq c_0 V_a^b(f) + V_{-a}^{a-0}(\sigma) V(f)$, дающее требуемое.

II шаг. Предположим, что $\sigma = \text{const}$ на $[a-\varepsilon, a]$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда в (2) при $h = \varepsilon$ второй интеграл исчезает и утверждение 2) теоремы получается из упоминавшегося свойства $V(\alpha * d\beta) \leq V(\alpha) V(\beta)$.

III шаг. Пусть имеет место общий случай. Для $\varepsilon > 0$ положим $\sigma_\varepsilon(t) = \sigma(t)$ при $t \in [-a, a-\varepsilon]$ и $t = a$, $\sigma_\varepsilon(t) = \sigma(a-0)$ при $t \in (a-\varepsilon, a)$. Обозначим через $\{f_\varepsilon\}$ семейство непрерывных на $[-a, a]$ функций со свойствами: 1) $f_\varepsilon \rightarrow f$ по норме $C[-a, a]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, 2) $V(f_\varepsilon) \leq H < \infty$, 3) $\omega(f_\varepsilon, \delta) \leq H_1 \omega(f, \delta)$, 4) $\int f_\varepsilon(t) d\sigma_\varepsilon(t) = 0$. Можно показать, что достаточно положить $f_\varepsilon = f + r(\varepsilon)$, где

$$r(\varepsilon) = \left(L(0) - \int_{a-\varepsilon+0}^{a-0} d\sigma \right)^{-1} \cdot \int_{a-\varepsilon+0}^{a-0} f(t) d\sigma(t),$$

если считать (не ограничивая общности), что $L(0) \neq 0$.

Функция σ_ε имеет (единичный) скачок в $t = a$. Значит, f_ε обладает п.с. продолжением на правую полупрямую. По II шагу $V_a^b(f) < \infty$, а по I шагу $\sup V_{-a}^b(f) < \infty$. Из утверждения 1) теоремы, третьего свойства семейства $\{f_\varepsilon\}$ и оценки для $c(b)$ следует, что семейство $\{f_\varepsilon\}$ равномерно непрерывно на $[-a, b]$. Наконец, из (1) следует равномерная ограниченность этого семейства. По теореме Арцела некоторая последовательность $\{f_{\varepsilon_i}(x)\}$ сходится по норме $C[-a, b]$ при $\varepsilon_i \rightarrow 0$. Предельная функция $F \in C[-a, b]$, $F = f$ на $[-a, a]$ и по первой теореме Хелли $V_{-a}^b(F) \leq c_1(b) V(f)$. Убедимся, что $F = f$. Так как $\{f_{\varepsilon_i}\}$ сходится на $[-a, b]$ равномерно, $\sigma_{\varepsilon_i} \rightarrow \sigma$ в каждой точке $[-a, a]$ и $\sup V(\sigma_{\varepsilon_i}) < \infty$, то по обобщению первой теоремы Хелли ((⁴), стр. 290) можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в уравнении $\int f_\varepsilon(t+x) d\sigma_\varepsilon(t) = 0$ при фиксированном $x \in [0, \alpha]$. Получим, что для таких x функция F удовлетворяет уравнению (1). По теореме единственности для п.с. функций (²) $F = f$ на $[-a, b]$. Теорема 1 доказана.

При некоторых дополнительных ограничениях на $\sigma(t)$ та часть теоремы 1, которая получается после удаления утверждений 1) и 2), была установлена в (7).

Применим теорему 1 к исследованию негармонического ряда Фурье по системе E_λ

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) e^{i\lambda_n x} = i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=\lambda_n} \frac{e^{izx}}{L(z)} \int_{-a}^a d\sigma(u) \int_0^u f(v) e^{iz(u-v)} dv. \quad (3)$$

Теорема 2. Пусть $f \in C[-a, a]$, имеет место соотношение (1) при $x=0$, а σ имеет скачки в точках $t = \mp a$. Предположим, что выполняется одно из условий: а) $\omega(f, \delta) \ln \delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, б) $\operatorname{var} f < \infty$. Тогда:

1) $\exists \{r_k\} \uparrow \infty$, $r_{k+1} - r_k = O(1)$ так, что подпоследовательность

$S_{r_k}(f, x) = \sum_{|\lambda_n| < r_k} P_n(x) e^{i\lambda_n x}$ частичных сумм ряда (3) сходится равномерно

на каждом отрезке, причем на $[-a, a]$ — к функции f ,

2) если $\inf_{n \neq m} |\lambda_n - \lambda_m| > 0$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) e^{i\lambda_n x}$ сходится равномерно

на каждом отрезке, причем на $[-a, a]$ — к функции f .

Доказательство опирается на: 1) теорему 1, гарантирующую существование для f п.с. продолжения на всю ось (это значит, что (1) выполняется для $\forall x \in (-\infty, \infty)$) с сохранением модуля непрерывности или ограниченности вариации, 2) теорему равносходимости (1) ряда (3) и обычного ряда Фурье, 3) признак Дини — Липшица или Дирихле — Жордана (в зависимости от условия а) или б)) для обычных рядов Фурье (близкий прием применялся в (5), где изучались ряды (3) для $f \in L^p$).

Теорема 2 обобщает известные признаки Дини — Липшица и Дирихле — Жордана. Часть теоремы 2, соответствующая условию б), в более слабой форме (утверждается сходимость S_r в $C[-a, a]$ к f) доказана в [6].

Московский энергетический институт

Поступило
17 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. М. Седлецкий, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, № 6, 1391 (1970). ² А. Ф. Леонтьев, Изв. АН СССР, сер. матем., 29, № 2, 269 (1965). ³ Ю. И. Любич, Изв. высш. учебн. завед., матем., 4, 94 (1959). ⁴ Г. Е. Шилов, Математический анализ, спец. курс, М., 1960. ⁵ А. М. Седлецкий, Матем. заметки, 12, № 1, 37 (1972). ⁶ В. А. Молоденков, А. П. Хромов, Дифф. уравнения и вычисл. матем., Саратов, 1, 17 (1972). ⁷ Ю. И. Любич, Матем. сборн., 38, № 2, 183 (1956).