Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 2

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

А. В. СОБОЛЕВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 VI 1973)

Недавно П. П. Забрейко, М. А. Красносельский и Ю. В. Покорный ([1]) выделили и изучили новый класс линейных положительных операторов в банаховых пространствах. Каждый оператор выделенного класса имеет ведущее собственное значение. В ([1]) указана оценка зазора между этим собственным значением и остальным спектром оператора.

Ниже результаты статьи ([1]) переносятся на операторы в линейных топологических пространствах.

1. Пусть (E, τ) — вещественное отделимое линейное топологическое пространство, полуупорядоченное замкнутым конусом K. Назовем элементы $u, v \in K$ сравнимыми, если найдутся $\lambda, \mu > 0$ такие, что $\lambda v \leqslant u \leqslant \mu v$. Конус K очевидно распадается на непересекающиеся компоненты, состоящие из элементов, попарно сравнимых между собой.

Для каждых двух сравнимых между собой элементов u и v определяется уклонение между ними. Это число

$$\Theta(u, v) = \beta / \alpha,$$

где

$$\beta = \inf\{\mu: \mu v \geqslant u\},\ \alpha = \sup\{\lambda: \lambda v \leqslant u\}.$$

Пусть R — компонента. Обозначим через $\hat{R}$ множество лучей вида

$$\hat{x} = \{\lambda u: \lambda \in (0, \infty),\ u \in R\}.$$

Тогда, как легко проверить, равенство

$$\rho(\hat{x}, \hat{y}) = \ln \Theta(u, v),$$

где $u \in \hat{x}$, $v \in \hat{y}$, определяет метрику в $\hat{R}$ (см. ([1])).

Компоненту R назовем нормальной, если для некоторого $u \in R$ конусный отрезок $\langle 0, u\rangle$ ограничен в топологии τ. Ограниченным будет каждый конусный отрезок $\langle 0, v\rangle$, если v — элемент нормальной компоненты.

Напомним, что линейное топологическое пространство (E, τ) называют полуполным (см. ([2])), если любая фундаментальная последовательность элементов пространства сходится к некоторому элементу этого пространства.

Лемма 1. *Пусть E полуполно, а компонента R нормальна. Тогда метрическое пространство $\hat{R}$ полно.*

Доказательство. Пусть $u_0 \in R$. Рассмотрим пространство E_{u_0} элементов $x \in E$, обладающих тем свойством, что $\alpha u_0 \leqslant x \leqslant \beta u_0$ для некоторых α и β. Введем в пространстве E_{u_0} u_0-норму $\|x\|_{u_0} = \inf\{t: -tu_0 \leqslant x \leqslant tu_0\}$ и покажем, что это пространство полно в u_0-норме.

Пусть последовательность $\{x_n\} \subset E_{u_0}$ фундаментальна по u_0-норме, т. е. для любого $\delta > 0$ найдется такое $N = N(\delta)$, что $\|x_n - x_m\|_{u_0} < \delta$ при $m, n \geqslant N$. В силу нормальности R конусный отрезок $\langle -\delta u_0, \delta u_0\rangle$ ограничен в топологии τ и для любой фиксированной окрестности нуля V найдется $\delta > 0$ такое, что $\langle -\delta u_0, \delta u_0 \rangle \subset V$. Поэтому $x_n - x_m \in V$ при $m, n \geqslant N(\delta)$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в топологии τ. Так как E полуполно, то найдется элемент $x^* \in E$ такой, что $x_n \to x^*$. Из замкнутости K вытекает, что $x^* \in E_{u_0}$. Переходя в выражении

$$-\delta u_0 \leqslant x_n - x_m \leqslant \delta u_0$$

к пределу при $m \to \infty$, получаем, что $\|x_n - x^*\|_{u_0} \leqslant \delta$ при $n \geqslant N(\delta)$, т. е. x_n сходится к x^* в E_{u_0}. Следовательно, пространство E_{u_0} полно.

Используя полноту E_{u_0}, с помощью рассуждений леммы 1 работы [1] устанавливаем полноту $\hat{R}$.

2. Определенный на E аддитивный, однородный и положительный оператор A назовем, следуя [1], фокусирующим, если он отличен на K от тождественного нуля и если

$$\Theta(Ax, Ay) \leqslant c^2, \quad x, y \in K, \quad Ax, Ay \neq 0. \tag{1}$$

Минимальное из чисел $c > 0$, при котором выполняется неравенство (1), обозначим через $\Theta(A)$.

Компоненту, которой принадлежат все ненулевые значения A на K, обозначим через $R(A)$. Назовем оператор A невырожденным, если из $u \in R(A)$ следует $Au \neq 0$.

Собственное значение λ_0 линейного оператора A называют позитивным [3], если $\lambda_0 > 0$ и если ему отвечает положительный собственный вектор. Лемма 1 и рассуждения работы [1] позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть A — невырожденный фокусирующий оператор, причем компонента $R(A)$ нормальна, а E полуполно. Тогда A имеет единственное позитивное собственное значение.*

3. Пусть $u_0 \in K$, $x \in E_{u_0}$. Величину

$$\operatorname{osc}(x, u_0) = \beta_0 - \alpha_0,$$

где α_0 — наибольшее из α, а β_0 — наименьшее из β, при которых выполняются неравенства $\alpha u_0 \leqslant x \leqslant \beta u_0$, назовем осцилляцией элемента x относительно u_0 [1]. Нетрудно видеть, что $\operatorname{osc}(x, u_0) \geqslant 0$, причем $\operatorname{osc}(x, u_0) = 0$ в том и только том случае, когда $x = \lambda u_0$. Очевидно равенство

$$\operatorname{osc}(\mu x, \nu u_0) = \frac{\mu}{\nu} \operatorname{osc}(x, u_0).$$

В [1] доказано, что если A — невырожденный фокусирующий оператор и $u_0 \in R(A)$, то справедливо неравенство

$$\operatorname{osc}(Ax, Au_0) \leqslant \frac{\Theta(A) - 1}{\Theta(A) + 1} \operatorname{osc}(x, u_0), \quad x \in E_{u_0}. \tag{2}$$

Лемма 2. *Пусть (E, τ) — полуполное отделимое линейное топологическое пространство, L — линейное многообразие в E, наделенное такой нормой $\|\cdot\|$, что топология, порождаемая ею, сильнее топологии, индуцированной на L топологией τ. Пусть L полно в норме $\|\cdot\|$. Пусть, наконец, $A\colon (E, \tau) \to (L, \|\cdot\|)$ — непрерывный линейный оператор. Тогда индуцированный оператором A оператор $\bar{A}\colon (L, \|\cdot\|) \to (L, \|\cdot\|)$ непрерывен и его спектр совпадает со спектром A, за исключением, может быть, точки $\lambda = 0$.*

Доказательство этой леммы близко к доказательству соответствующего утверждения для операторов, действующих в банаховых пространствах (см. [5]).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и некоторая окрестность нуля W в топологии τ отображается оператором A в конусный отрезок $\langle -z, z \rangle$, причем $z \in R(A)$. Тогда, если λ_0 — позитивное собственное зна-*

чение оператора A, то весь остальной спектр A лежит в круге

$$|\lambda| \leqslant \lambda_0 \frac{\Theta(A)-1}{\Theta(A)+1}$$

Доказательство. Пусть u_0 — положительный собственный вектор оператора A, отвечающий λ_0. Тогда $u_0 \in R(A)$ и, следовательно, $z \leqslant l u_0$ при некотором l. Поэтому $AW \subset \langle -lu_0, lu_0 \rangle$, откуда следует, что $AE \subset E_{u_0}$. Из леммы 1 вытекает, что E_{u_0} полно в норме $\|\cdot\|_{u_0}$. Таким образом, мы находимся в условиях леммы 2, и поэтому достаточно рассмотреть спектр оператора $\tilde{A}: E_{u_0} \to E_{u_0}$.

Множество $K_{u_0} = K \cap E_{u_0}$ является телесной полугруппой в E_{u_0}, A — линейный оператор и $AK_{u_0} \subset K_{u_0}$. Поэтому из теоремы Крейна — Рутмана ([4]) следует, что существует функционал $f \in (K_{u_0})^*$ такой, что $\tilde{A}^* f = \lambda_0 f$. Обозначим ядро f через F. Нетрудно проверить, что $AF \subset F$ и $u_0 \notin F$. Функционал

$$\|x\|_0 = \operatorname{osc}(x, u_0),$$

как легко видеть, является нормой на подпространстве $N = E_{u_0} \cap F$. При этом

$$\|x\|_{u_0} \leqslant \|x\|_0 \leqslant 2\|x\|_{u_0},$$

т. е. норма $\|\cdot\|_0$ эквивалентна обычной u_0-норме.

Опираясь на неравенство (2), получим для любого элемента $x \in N$

$$\|\tilde{A}x\|_0 = \operatorname{osc}(\tilde{A}x, u_0) = \operatorname{osc}(\lambda_0 \tilde{A}x, \lambda_0 u_0) = \lambda_0 \operatorname{osc}(\tilde{A}x, \tilde{A}u_0) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_0 \frac{\Theta(A)-1}{\Theta(A)+1} \operatorname{osc}(x, u_0) = \lambda_0 \frac{\Theta(A)-1}{\Theta(A)+1} \|x\|_0.$$

Таким образом,

$$\|\tilde{A}|_F\| \leqslant \lambda_0 \frac{\Theta(A)-1}{\Theta(A)+1}.$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы.

В заключение выражаю искреннюю благодарность М. А. Красносельскому за руководство работой.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
16 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. П. Забрейко, М. А. Красносельский, Ю. В. Покорный, Функц. анализ., 5, в. 4, 9 (1971). [2] Х. Шефер, Топологические векторные пространства, М., 1971. [3] М. А. Красносельский, Положительные решения операторных уравнений, М., 1962. [4] М. Г. Крейн, М. А. Рутман, УМН, 3, в. 1, 3 (1948). [5] Т. Сабиров, Сборн. работ студентов и аспирантов по математике, Воронежск. гос. унив., 1965, стр. 71.