

Дж. И. МАМЕДХАНОВ

НЕРАВЕНСТВА ТИПА С. М. НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО НА КРИВЫХ

(Представлено академиком С. М. Никольским 11 V 1973)

Под неравенствами типа С. М. Никольского мы, как обычно (см., например, (2) — (3)), будем понимать неравенства между различными нормами одной и той же функции на заданных множествах.

Отметим, что многочисленные исследования таких неравенств проводились или на всей вещественной оси, или на ее конечном отрезке*.

В этой работе нами получен ряд общих и точных в смысле порядка неравенств указанного типа для многочленов комплексного переменного вдоль спрямляемых кривых Жордана.

Пусть Γ — замкнутая или разомкнутая спрямляемая кривая Жордана, $l(\Gamma)$ — длина кривой Γ ; функция $w = \varphi(z)$ отображает внешность кривой Γ плоскости z на внешность γ , $\gamma: |w|=1$, плоскости w , так что $\varphi(\infty) = \infty$; Γ_R , $R > 1$, — линия уровня кривой Γ , соответствующая окружности $|w|=R$; $d(z, x)$ — функция точки $z \in \Gamma$, определяющая расстояние этой точки до кривой Γ_{1+x} , $x > 0$ **. Обозначим через $\mathcal{P}$ совокупность всех алгебраических многочленов степени $\leq n$ и введем в рассмотрение две нормы:

$$\|P_n\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |P_n(z)|^p |dz| \right)^{1/p}, \quad p > 0; \quad (1)$$

$$\|P_n\|_{L_p(\Gamma)}^* = \left(\frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} |P_n(z)|^p |dz| \right)^{1/p}, \quad p > 0. \quad (2)$$

Отметим, что в случае, когда кривая Γ разомкнутая, интеграл берется по границе разрезанной вдоль Γ плоскости.

Нами доказана следующая

Теорема 1. Если $P_n(z) \in \mathcal{P}$, Γ — произвольная спрямляемая кривая и $p > 0$, то

$$\max_{z \in \Gamma_R} |P_n(z)| \leq \left(\frac{R^m}{2\pi} \right)^{2/p} [\delta(\Gamma)]^{1/p} \|P_n\|_{L_p(\Gamma)}, \quad (3)$$

где $m = n + 1$,

$$\delta(\Gamma) = \sup_{z \in \Gamma_R} \inf_{t \in \Gamma} \frac{|dt|}{|t - z|^2}.$$

В дальнейшем мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. Если Γ — произвольная спрямляемая кривая, то для $P_n(z) \in \mathcal{P}$ имеем

$$\|P_n\|_{L_p(\Gamma_R)} \leq R^{n+1/p} \|P_n\|_{L_p(\Gamma)}, \quad p > 0, \quad (4)$$

и

$$\|P_n\|_{L_p(\Gamma_R)}^* \leq R^n \|P_n\|_{L_p(\Gamma)}^*, \quad p > 0. \quad (5)$$

* В многомерном случае см., например, работы (1, 2, 4).

** Более подробные сведения о функции $d(z, x)$ имеются в работе (7).

Неравенство (4) получено в работе ⁽⁵⁾, а неравенство (5), которое в некотором смысле улучшает неравенство (4), доказано нами *. С помощью теоремы 1 и леммы 1 доказывается следующая

Теорема 2. Если Γ — произвольная спрямляемая кривая и $0 < p \leq p' \leq \infty$, то для $P_n(z) \in \mathcal{P}$ имеем

$$\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma_R)} \leq R^{np/p' + 1/p'} \left[\frac{R^m}{2\pi} \right]^2 \delta(\Gamma) \Big]^{1/p - 1/p'} \|P_n\|_{L_p(\Gamma)} \quad (6)$$

и

$$\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma_R)} \leq R^{np/p'} \left[\left(\frac{R^m}{2\pi} \right)^2 l(\Gamma) \delta(\Gamma) \right]^{1/p - 1/p'} \|P_n\|_{L_p(\Gamma)}, \quad (7)$$

где l и $\delta(\Gamma)$ определены, как и в теореме 1.

В теоремах 1 и 2 нормы вдоль линии уровня Γ_R оцениваются посредством другой нормы вдоль заданной кривой Γ . Подобные утверждения доказаны нами еще в случае, когда нормы, входящие в указанные неравенства, берутся вдоль одной и той же кривой.

Теорема 3. Если Γ — произвольная спрямляемая кривая и $0 < p \leq p' \leq \infty$, то для $P_n(z) \in \mathcal{P}$ имеет место

$$\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma)} \leq \left(\frac{l}{2\pi} \right)^{2(1/p - 1/p')} [\delta_n^*(\Gamma)]^{1/p - 1/p'} \|P_n\|_{L_p(\Gamma)}, \quad (8)$$

где

$$\delta_n^*(\Gamma) = \sup_{z \in \Gamma_{1+1/n}} \int_{\Gamma} \frac{|dt|}{|t-z|^2}.$$

Из этой теоремы непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. При условиях теоремы 3 имеем

$$\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma)} \leq \left(\frac{l^2}{2\pi} \right)^{1/p - 1/p'} \left[\frac{1}{d(1/n)} \right]^{1/p - 1/p'} \|P_n\|_{L_p(\Gamma)}, \quad (9)$$

где

$$d(1/n) = \inf_{z \in \Gamma} d(z, 1/n).$$

Введем в рассмотрение теперь следующие классы кривых.

Замкнутую спрямляемую кривую Γ , с отображающей функцией $\varphi(z)$, назовем кривой типа (S) , если

$$0 < N_1 \leq \left| \frac{\varphi(t) - \varphi(z)}{t - z} \right| \leq N_2 < \infty,$$

и кривой типа (α) , если

$$|\varphi(t) - \varphi(z)| \leq A |t - z|^{1/\alpha}, \quad 1 \leq \alpha \leq 2, \quad t \in \Gamma_R, \quad z \in \Gamma.$$

Наконец, замкнутую спрямляемую кривую Γ будем называть кривой типа (N) , если она состоит из дуг, имеющих непрерывную кривизну, и угловых точек z_i , $i=1, 2, \dots, k$, с внешними углами, равными $u_i\pi$, $0 < u_i \leq 2$, причем

$$N = \max_{1 \leq i \leq k} (1, u_i).$$

Очевидно, что класс кривых типа (α) при всех α , $1 \leq \alpha \leq 2$, шире класса кривых типа (S) , а последний в свою очередь содержит в себе класс спрямляемых аналитических кривых Жордана. Поэтому следующее утверждение, вытекающее из теоремы 3, является обобщением и улучшением, в смысле постоянного множителя, известного неравенства Севелла ⁽⁶⁾.

* В случае, когда Γ есть окружность $|z|=1$, неравенство (5) в смысле порядка точнее, чем неравенство (4).

Следствие 2. Если $\Gamma \subset (\alpha)$, $P_n(z) \in \mathcal{P}$ и $0 < p < p' \leq \infty$, то

$$\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma)} \leq \left(\frac{l^2}{2\pi}\right)^{1/p-1/p'} \left(\frac{n}{A}\right)^{\alpha(1/p-1/p')} \|P_n\|_{L_p(\Gamma)}. \quad (10)$$

Отсюда вытекает

Следствие 3. Если $\Gamma: |z|=1$, $P_n(z) \in \mathcal{P}$ и $0 < p \leq p' \leq \infty$, то

$$\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma)} \leq \left(\frac{2l^2}{3\pi}\right)^{1/p-1/p'} n^{1/p-1/p'} \|P_n\|_{L_p(\Gamma)}. \quad (11)$$

Заметим, что непосредственным вычислением из теоремы 3 можно для алгебраических многочленов получить неравенства типа С. М. Никольского на прямолинейном отрезке, доказанные ранее в работах ^(2, 3).

Используя некоторые свойства кривых класса (N) из теоремы 3, можно получить

Следствие 4. Если $\Gamma \subset (N)$, $P_n(z) \in \mathcal{P}$ и $0 < p \leq p' \leq \infty$, то

$$\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma)} \leq (An)^{N(1/p-1/p')} \|P_n\|_{L_p(\Gamma)}, \quad (12)$$

где A — абсолютная константа, зависящая лишь от свойства кривой Γ .

Следствие 5. Если Γ — произвольная спрямляемая кривая, содержащая точки возврата (т. е. угловые точки с внешним углом, равным 0 или 2π), и $P_n(z) \in \mathcal{P}$, то при $0 < p \leq p' < \infty$ имеем

$$\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma)} \leq (An)^{2(1/p-1/p')} \|P_n\|_{L_p(\Gamma)}, \quad (13)$$

где A — абсолютная константа, зависящая лишь от свойства Γ .

Отметим, что с помощью данных неравенств методом, приведенным в работе И. И. Ибрагимова ⁽²⁾, можно получить непосредственные аналоги теорем А. А. Конюшкова ⁽⁸⁾ на произвольных кривых, связывающие наилучшие приближения некоторых функций посредством многочленов, в различных интегральных метриках.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
10 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969. ² И. И. Ибрагимов, Экстремальные свойства целых функций конечной степени, Баку, 1962. ³ А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960. ⁴ Д. М. Мамедханов, ДАН, 157, № 3, 526 (1964). ⁵ E. Hille, G. Szegő, J. Tamarkin, Duke Math., 3, 729 (1937). ⁶ W. E. Sewell, Degree of Approximation by Polynomials in the Complex Domain, 1942. ⁷ В. К. Дзядык, Третья летняя математическая школа, Киев, стр. 29. ⁸ А. А. Конюшков, Матем. сборн., 44 (86), № 1, 53 (1958).