

Член-корреспондент АН СССР А. А. МАРКОВ

О ЯЗЫКЕ Я,

В статье (¹) был намечен способ построения конструктивной математической логики методом ступенчатой семантической системы, т. е. путем сооружения некоторой «башни» языков. Здесь описывается возможный «подвальный этаж» такой башни — некоторый язык Я₀.

В дальнейшем Λ означает пустое слово, $\equiv$ есть знак равенства по определению, $\sqsubseteq$ — знак графического равенства, $\neq$ — знак графического различия, НЧ означает «натуральное число», НА — «нормальный алгоритм».

Литероидами [Лд] называются слова вида (P) , где P — непустое слово в однобуквенном алфавите a ; переменными [Пн] называются слова вида $\langle P \rangle$, где P — непустое слово в однобуквенном алфавите s ; а томами [Ам] называются Лд и Пн. Вербоиды [Вд] определяются следующими двумя правилами построения:

$$\text{Вд 1. } \Lambda - \text{Вд.} \quad \text{Вд 2. } \frac{P - \text{Вд.} \quad Q - \text{Лд.}}{PQ - \text{Вд.}}$$

Эти правила понимаются здесь так: Λ считается Вд; если P есть Вд, а Q — Лд, то PQ считается Вд. Аналогично понимаются в этой статье другие правила построения. Постоянные термы [ПТ] определяются следующими правилами построения:

$$\text{ПТ 1. } \Lambda - \text{ПТ.} \quad \text{ПТ 2. } \frac{P - \text{ПТ.} \quad Q - \text{Лд.}}{PQ - \text{ПТ.}} \quad \text{ПТ 3. } \frac{P, Q - \text{ПТ.}}{P\{Q\} - \text{ПТ.}}$$

Термы [Тм] определяются следующими правилами построения:

$$\text{Тм 1. } \Lambda - \text{Тм.} \quad \text{Тм 2. } \frac{P - \text{Тм.} \quad Q - \text{Ам.}}{PQ - \text{Тм.}} \quad \text{Тм 3. } \frac{P, Q - \text{Тм.}}{P\{Q\} - \text{Тм.}}$$

Всякий непустой Вд единственным образом представляется в виде PQ , где P — Вд, а Q — Лд. Всякий непустой ПТ представляется в одном и только в одном из видов: PQ , где P — ПТ, а Q — Лд; $P\{Q\}$, где P и Q — ПТ. В обоих случаях указанное представление единственно. Всякий непустой Тм представляется в одном и только в одном из видов, PQ , где P — Тм, а Q — Ам; $P\{Q\}$, где P и Q — Тм. В обоих случаях указанное представление единственно.

Определим операцию подстановки Тм вместо Пн в Тм. Результат подстановки Тм T вместо Пн X в Тм U будет обозначаться

$$\S_1 XU \square T_1.$$

Индуктивное определение состоит из трех пунктов § 1, § 2 и § 3:

§ 1. $\S_1 X \wedge \square T_1 \equiv \Lambda$;

§ 2. $\S_1 XUW \square T_1 \equiv \begin{cases} \S_1 XU \square T_1 W, & \text{если } X \neq W, \\ \S_1 XU \square T_1 T, & \text{если } X \sqsubseteq W; \end{cases}$

§ 3. $\S_1 XU\{V\} \square T_1 \equiv \S_1 XU \square T_1 \{\S_1 XV \square T_1\}$;

здесь U и V — Тм, W — Ам.

Результат подстановки Тм вместо Пн в Тм есть Тм.

Вд будут в дальнейшем применяться для кодирования слов в различных алфавитах. Это будет делаться следующим образом.

Пусть A — алфавит. Обозначим $v_L \xi_L$, где ξ — буква алфавита A , порядковый номер этой буквы в алфавите A . Определим алгоритм $\mathfrak{T}_A$ следующими равенствами $\mathfrak{T}_A 1$ и $\mathfrak{T}_A 2$:

$$\mathfrak{T}_A 1. \mathfrak{T}_A \Lambda_L \Rightarrow \Lambda;$$

$$\mathfrak{T}_A 2. \mathfrak{T}_A P \xi_L \Rightarrow \mathfrak{T}_A P_L (a^{v_L \xi_L}),$$

где показатель при букве a означает ее $v_L \xi_L$ -кратное повторение. Здесь P — любое слово в алфавите A , ξ — любая буква этого алфавита. Мы будем называть $\mathfrak{T}_A P_L$ переводом слова (относительно алфавита A).

Перевод всякого слова P в алфавите A есть Вд, по которому слово P может быть однозначно восстановлено.

Определим теперь алгоритм вычисления значения ПТ. Обозначая этот алгоритм через $\mathfrak{W}$, положим:

$$\mathfrak{W} 1. \mathfrak{W} \Lambda_L \Rightarrow \Lambda;$$

$$\mathfrak{W} 2. \mathfrak{W} P L_L \Rightarrow \mathfrak{W} P_L L;$$

$$\mathfrak{W} 3. \mathfrak{W} P \{Q\}_L \Rightarrow \mathfrak{W} P_L \mathfrak{T}_{a(L)} \mathfrak{W} Q_{LL},$$

где P и Q — любые ПТ, L — любой Лд. Результат применения алгоритма $\mathfrak{W}$ к ПТ P мы будем называть значением ПТ P .

Значение всякого ПТ есть однозначно определенный Вд. Значение всякого Вд есть этот самый Вд.

Будем называть сравнителями [Сл] знаки $=$ и $\neq$.

Будем называть элементарными формулами [ЭФ] слова вида

$$(T \sigma U),$$

где T и U — Тм, σ — Сл.

Всякая ЭФ единственным образом представляется в виде $(T \sigma U)$, где T и U — Тм, σ — Сл.

Будем называть юнкторами [Юр] знаки $\&$ и $\vee$; кванторами [Кр] — знаки $\forall$ и $\exists$; ограничителями [Ол] — знаки $<$ и $>$; Юр и Кр будем называть логическими знаками [ЛЗ].

Будем называть вербоидными началами (концами) слова P Вд, являющиеся началами (концами) слова P .

Определим формулы языка $\mathcal{A}_0$ [Фл0] посредством следующих правил построения:

$$\text{Фл 0.1. } \frac{A - \text{ЭФ}}{A - \text{Фл0}};$$

$$\text{Фл 0.2. } \frac{A, B - \text{Фл0}; \lambda - \text{Юр}}{\lambda AB - \text{Фл0}}.$$

$$\text{Фл 0.3. } \frac{A - \text{Фл0}, \kappa - \text{Кр}, X - \text{Пн}, U - \text{Тм}, \beta - \text{Ол}}{\kappa U \beta X A - \text{Фл0}}$$

Всякая Фл0 представляется в одном и только в одном из видов: A , где $A - \text{ЭФ}$; λAB , где A и $B - \text{Фл0}$, $\lambda - \text{Юр}$; $\kappa U \beta X A$, где $A - \text{Фл0}$, $\kappa - \text{Кр}$, $X - \text{Пн}$, $U - \text{Тм}$, $\beta - \text{Ол}$. Во всех случаях указанное представление единственно.

Определим параметры [Пр] Фл0 следующими правилами:

Пр 0.1. Пр ЭФ A считаются Пн, входящие в A ;

Пр 0.2. Пр Фл0 λAB , где $\lambda - \text{Юр}$, A и $B - \text{Фл0}$, считаются Пр A и Пр B ;

Пр 0.3. Пр Фл0 $\kappa U \beta X A$, где $\kappa - \text{Кр}$, $U - \text{Тм}$, $\beta - \text{Ол}$, $X - \text{Пн}$, $A - \text{Фл0}$, считаются Пн, входящие в U , и Пр A , отличные от X .

Будем называть замкнутыми Фл0 [ЗФ0] Фл0 без Пр. Будем называть X Фл0 $[X\text{Ф0}]$, где $X - \text{Пн}$, Фл0, не имеющие Пр, отличных от

Х. Будем называть ХУ Фл0 [ХУФ0], где Х и У — Пн, Фл0, не имеющие Пр, отличных от Х и от У, и т. д.

Будем называть логической длиной Фл0 А в языке Я₀ число вхождений ЛЗ в А. Имеется алгоритм $\mathfrak{E}_0$, перерабатывающий всякую Фл0 в ее логическую длину.

Определим операцию подстановки Тм вместо Пн в Фл0. Результат подстановки Тм Т вместо Пн Х в Фл0 А будет обозначаться $\mathfrak{F}_{01}XAT_J$. Определение будет индуктивным. Началом индукции будет служить случай, когда $\mathfrak{E}_{01}A_J \equiv 0$, т. е. когда А — ЭФ (см. ниже пункт §01). Далее, предполагая $\mathfrak{F}_{01}XAT_J$ определенным, коль скоро $\mathfrak{E}_{01}A_J \leq N$, где N — НЧ, определим $\mathfrak{F}_{01}XAT_J$ при $\mathfrak{E}_{01}A_J = N+1$ (см. п.п. §02 и §03). Определим $\mathfrak{F}_{01}XAT_J$ следующими равенствами:

$$\mathfrak{F}_{01}. \mathfrak{F}_{01}X(U\sigma V)T_J = (\mathfrak{F}_{01}XU\Box T_J)\sigma(\mathfrak{F}_{01}XV\Box T_J);$$

$$\mathfrak{F}_{02}. \mathfrak{F}_{01}X\lambda BCT_J = \lambda\mathfrak{F}_{01}XBT_J\mathfrak{F}_{01}XCT_J;$$

$$\mathfrak{F}_{03}. \mathfrak{F}_{01}X\kappa U\beta YBT = \begin{cases} \kappa\mathfrak{F}_{01}XU\Box T_J\beta YB, & \text{если } X \text{ не есть отличный от } Y \\ \text{Пр } B; \\ \kappa\mathfrak{F}_{01}XU\Box T_J\beta Y\mathfrak{F}_{01}XBT_J, & \text{если } X \neq Y, X - \text{Пр } B \text{ и} \\ Y \text{ не входит в } T; \\ \kappa\mathfrak{F}_{01}XU\Box T_J\beta Z\mathfrak{F}_{01}X\mathfrak{F}_{01}YBZ_JT_J, & \text{если } X \neq Y, X - \\ \text{Пр } B \text{ и } Y \text{ входит в } T; \end{cases}$$

здесь U и V — Тм, σ — Сл, λ — Юр, B и C — Фл0, κ — Кр, β — Ол, Y — Пн, Z — Пн наименьшей длины, не входящая в T и не являющаяся Пр B.

Если X — Пн, А — Фл0 и T — Тм, то $\mathfrak{F}_{01}XAT_J$ есть Фл0 и $\mathfrak{E}_{01}\mathfrak{F}_{01}XAT_J \equiv \mathfrak{E}_{01}A_J$.

Определим теперь наше понимание ЗФ0 посредством следующих восьми семантических соглашений:

Сс1. Замкнутая ЭФ ($U=V$), где U и V — ПТ, выражает графическое равенство значений этих ПТ.

Сс2. Замкнутая ЭФ ($U \neq V$), где U и V — Пт, выражает графическое различие значений этих Пт.

Сс3. ЗФ0 $\&AB$, где A и B — ЗФ0, выражает истинность обеих ЗФ0 A и B.

Сс4. ЗФ0 $\bigvee AB$, где A и B — ЗФ0, выражает, что мы в состоянии указать верную ЗФ0, совпадающую с A или с B.

Сс5. ЗФ0 $\forall U < XA$, где U — Пт, X — Пн, A — ХФ0, выражает, что верна всякая ЗФ0 вида $\mathfrak{F}_{01}XAQ_J$, где Q — вербоидное начало $\mathfrak{W}_1U_J$.

Сс6. ЗФ0 $\forall U > XA$, где U, X и A как в Сс5, выражает, что верна всякая ЗФ0 вида $\mathfrak{F}_{01}XAQ_J$, где Q — вербоидный конец $\mathfrak{W}_1U_J$.

Сс7. ЗФ0 $\exists U < XA$, где U, X и A как в Сс5, выражает, что мы в состоянии указать вербоидное начало Q вербоида $\mathfrak{W}_1U_J$ такое, что верна ЗФ0 $\mathfrak{F}_{01}XAQ_J$.

Сс8. ЗФ0 $\exists U > XA$, где U, X и A такие же как в Сс5, выражает, что мы в состоянии указать вербоидный конец вербоида $\mathfrak{W}_1U_J$ такой, что верна ЗФ0 $\mathfrak{F}_{01}XAQ_J$.

Это определение также является индуктивным. Индукция идет здесь по логической длине той ЗФ0, понимание которой определяется.

В языке Я₀ нет знака отрицания. Однако отрицание Фл0 может быть введено с помощью алгоритма $\mathfrak{N}$, заменяющего во всякой Фл0 знак = знаком $\neq$, знак $\neq$ — знаком =, знак $\&$ — знаком $\bigvee$, знак $\bigvee$ — знаком $\&$, знак $\forall$ — знаком $\exists$ и знак $\exists$ — знаком $\forall$. Этот алгоритм перерабатывает всякую Фл0 в Фл0, причем для всякой ЗФ0 А ЗФ0 $\&A\mathfrak{N}_1A_J$ ложна, а ЗФ0 $\bigvee A\mathfrak{N}_1A_J$ верна. Это значит, что $\mathfrak{N}_1A_J$ является прямым отрицанием А ⁽¹⁾. Отсюда следует, что язык Я₀ разрешим: *имеется алгоритм, применимый ко всякой ЗФ0 А и перерабатывающей А в $\bigwedge$ тогда и только тогда, когда А верна.*

На языке $\mathcal{L}_0$ выразимы некоторые предикаты, связанные с работой НА. Пусть $\mathcal{A}$ — НА в алфавите A . Может быть построена $x\Phi 0 (x^{\neg})_{\mathcal{A}}$ такая, что $3\Phi 0 \mathfrak{F}_{0L} x (x^{\neg})_{\mathcal{A}} \mathfrak{E}_{AL} P_{JJ}$ верна тогда и только тогда, когда слово P в алфавите A не поддается алгоритму $\mathcal{A}$. Могут быть построены $xy\Phi 0 (x^{\neg}y)_{\mathcal{A}}$ и $(x^{\neg} \cdot y)_{\mathcal{A}}$ такие, что каждая из $3\Phi 0$

$\mathfrak{F}_{0L} y \mathfrak{F}_{0L} x (x^{\neg}y)_{\mathcal{A}} \mathfrak{E}_{AL} P_{JJ} \mathfrak{E}_{AL} Q_{JJ}$ и $\mathfrak{F}_{0L} y \mathfrak{F}_{0L} x (x^{\neg} \cdot y)_{\mathcal{A}} \mathfrak{E}_{AL} P_{JJ} \mathfrak{E}_{AL} Q_{JJ}$ тогда и только тогда верна, когда алгоритм $\mathcal{A}$ просто (и соответственно заключительно) переводит слово P в алфавите A в слово Q в этом алфавите. Здесь $x \rightleftharpoons (c)$, $y \rightleftharpoons (cc)$.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
6 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. А. Марков, Вестн. Московск. ун-в., № 2 (1970). ² А. А. Марков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 42 (1954).