

В. В. ПАШЕНКОВ

ПРОДОЛЖЕНИЯ БИКОМПАКТОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 2 XI 1972)

В настоящей заметке для произвольного бикомпакта X определяется некоторый новый бикомпакт $\hat{Z}$, называемый продолжением бикомпакта X , и изучаются некоторые его свойства. Это позволяет решить две проблемы о диадических бикомпактах (следствия 1 и 2).

Пусть X — произвольный бикомпакт, не имеющий изолированных точек. Обозначим через Y совокупность всевозможных функций, определенных на множестве X и принимающих значения 1 и -1 . На множестве Y введем топологию, приняв за базу открытых множеств всевозможные множества вида $[x^i] = \{y \in Y: y(x) = i\}$, где $x \in X$ и $i = \pm 1$. Легко видеть, что Y гомеоморфно стоуновскому пространству свободной булевой алгебры со множеством свободных образующих мощности $|X|$ и потому гомеоморфно обобщенному канторову дисконтинууму $D^{|X|}$ (1), стр. 71). Обозначим топологическое произведение бикомпактов X и Y через Z , $Z = X \times Y$. На множестве Z определим бинарное отношение « $\sim$ », полагая для любых элементов $(x_1, y_1); (x_2, y_2) \in Z$ соотношение $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ выполненным, если $x_1 = x_2$ и для любого $x \in X \setminus x_1$ выполняется равенство $y_1(x) = y_2(x)$. Легко видеть, что отношение « $\sim$ » есть отношение эквивалентности и что класс каждого элемента (x, y) , который мы будем обозначать дальше через $\hat{z}$, состоит в точности из двух элементов. Обозначим через $\hat{Z}$ фактор-пространство $Z/\sim$, которое мы будем называть продолжением бикомпакта X , и через f естественное отображение $f: Z \rightarrow \hat{Z}$. Подмножество бикомпакта Z , являющееся полным прообразом некоторого подмножества из $\hat{Z}$ при отображении f , будем называть отмеченным.

Лемма 1. Пусть $U \subset X$ и

$$V = [x_1^{i_1}] \cap [x_2^{i_2}] \cap \dots \cap [x_n^{i_n}], \quad (1)$$

где $i_k = \pm 1$ и $x_k \neq x_p$ при $k \neq p$ для $k, p = 1, 2, \dots, n$. Для того чтобы множество (U, V) было отмечено, необходимо и достаточно, чтобы $x_k \notin U$ при всех k .

Лемма 2. Для любого непустого открытого множества $W \subset Z$ существует такое непустое открытое отмеченное множество W_0 , что $W_0 \subset W$.

Доказательство. Выберем такие открытые множества $U \subset X$ и $V_0 \subset Y$, что $\phi \neq (U, V) \subset W^*$ причем V имеет вид (1). Ввиду отсутствия изолированных точек в X , мы можем выбрать такое открытое множество U_0 , что $\phi \neq U_0 \subset U \setminus \{x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_n\}$. Тогда $W_0 = (U_0, V_0)$ и есть требуемое множество.

Лемма 3. Пусть $\hat{z} \in W$ для некоторого открытого $W \subset Z$. Существует такое отмеченное открытое множество W_0 , что выполняются включения $\hat{z} \in W_0 \subset W$, причем $W_0 = (U_0, V_0)$, где U_0 открыто в X , а V_0 имеет вид (1).

Замечание. Если бикомпакт X нульмерен, то указанное в лемме 3 множество W_0 можно выбрать открыто-замкнутым.

Непосредственно из леммы 3 и замечания вытекает такая

* Здесь и дальше ϕ означает пустое множество.

Теорема 1. Для любого бикомпакта X (без изолированных точек) его продолжение $\hat{Z}$ есть бикомпактное хаусдорфово пространство. Если X — нульмерный бикомпакт, то $\hat{Z}$ также нульмерный бикомпакт.

Используя лемму 2, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Для любого бикомпакта X непрерывное отображение $f: Z \rightarrow \hat{Z}$ является неприводимым.

Следствие 1. Взяв за X канторово множество, мы будем иметь непрерывное неприводимое отображение f обобщенного канторова дисконтинуума Z на диадический бикомпакт $\hat{Z}$, причем множество точек однозначности этого отображения пусто. Таким образом, в классе диадических бикомпактов существует непрерывное неприводимое отображение с пустым множеством точек однозначности. (Это ответ на вопрос, поставленный в ⁽²⁾, стр. 242).

Лемма 4. Пусть $\varphi: X \rightarrow X$ — некоторое взаимно однозначное отображение бикомпакта X на себя; y_1, y_2 — произвольные элементы из Y . Отображение

$$\psi: y(x) \rightarrow y_1(\varphi^{-1}(x))y_2(x)y(\varphi^{-1}(x))$$

есть гомеоморфизм бикомпакта Y на себя, причем $\psi(y_1) = y_2^*$.

Доказательство. Если функции y' и y'' различаются на элементе x_0 , то функции $\psi(y')$ и $\psi(y'')$ различаются на элементе $\varphi(x_0)$, т. е. отображение ψ взаимно однозначно. Для любой функции $y \in Y$ функция $y'(x) = y_1(x)y_2(\varphi(x))y(\varphi(x))$ обладает, как легко проверить, тем свойством, что $\psi(y') = y$, т. е. является прообразом при отображении f . Таким образом, $\psi(Y) = Y$.

Докажем для произвольного $x_0 \in X$ и $i = \pm 1$ равенство

$$\psi([x_0^i]) = [\varphi(x_0)y_1(x_0)y_2(\varphi(x_0))^i]. \quad (2)$$

Пусть $y \in \psi([x_0^i])$, т. е. $y = \psi(y')$, где $y'(x_0) = i$. При всех $x \in X$ имеем $y(x) = y_1(\varphi^{-1}(x))y_2(x)y'(\varphi^{-1}(x))$. В частности, полагая в этом равенстве $x = \varphi(x_0)$, получим равенство

$$y(\varphi(x_0)) = y_1(x_0)y_2(\varphi(x_0))y'(x_0) = y_1(x_0)y_2(\varphi(x_0))i,$$

а это и означает, что y принадлежит правой части (2).

Обратно, пусть y принадлежит правой части (2). Обозначим $\psi^{-1}(y) = y'$. Тогда $y'(x) = y_1(x)y_2(\varphi(x))y(\varphi(x))$ при всех $x \in X$. В частности, при $x = x_0$ имеем

$$y'(x_0) = y_1(x_0)y_2(\varphi(x_0))y(\varphi(x_0)). \quad (3)$$

Поскольку y содержится в правой части (2), имеем равенство $y(\varphi(x_0)) = y_1(x_0)y_2(\varphi(x_0))i$, что вместе с (3) дает $y'(x_0) = i$, т. е. $y' \in [x_0^i]$ и $y \in \psi([x_0^i])$.

Взаимная непрерывность отображения ψ непосредственно следует из (2) и того факта, что множества вида $[x_0^i]$ при всевозможных $x_0 \in X$ и $i = \pm 1$ образуют предбазу открытых множеств пространства Y .

Наконец, равенство $\psi(y_1) = y_2$ очевидно.

Теорема 3. Для любого топологически однородного бикомпакта X его продолжение $\hat{Z}$ также есть топологически однородный бикомпакт.

Доказательство. Пусть $\hat{z}_1 = (x_1, \hat{y}_1)$, $\hat{z}_2 = (x_2, \hat{y}_2)$ — произвольные точки бикомпакта $\hat{Z}$. Выберем некоторый гомеоморфизм φ бикомпакта X на себя, для которого $\varphi(x_1) = x_2$. Пусть ψ — гомеоморфизм бикомпакта Y на

* Если $h(x), p(x)$ — функции, принимающие значения ± 1 , то под $h(x)p(x)$ мы понимаем новую функцию, принимающую для каждого $x_0 \in X$ значение $h(x_0)p(x_0)$, где $h(x_0)$ и $p(x_0)$ перемножаются как действительные числа.

себя, построенный в лемме 4. Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что гомеоморфизм Φ пространства Z на себя, определенный формулой $\Phi(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$, переводит отмеченные подмножества в отмеченные, т. е. что соотношения $(x', y') \sim (x'', y'')$ и $(\varphi(x'), \psi(y')) \sim (\varphi(x''), \psi(y''))$ равносильны. Эта проверка не представляет труда.

Лемма 5. Для любого $x_0 \in X$ множество $f(X \setminus x_0, [x_0^i])$, где $i = \pm 1$, является канонически открытым в $\hat{Z}$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что $\overline{(X \setminus x_0, [x_0^i])} = (X, [x_0^i])^*$ в пространстве Z . Поскольку отображение f непрерывно и замкнуто, мы имеем $f(\overline{(X \setminus x_0, [x_0^i])}) = \overline{f(X \setminus x_0, [x_0^i])} = \overline{f(X, [x_0^i])}$. Легко убедиться, что

$$f^{-1}[f(X, [x_0^i])] = (x_0, Y) \cup (X \setminus x_0, [x_0^i]). \quad (4)$$

Пусть $\hat{z}$ является внутренней точкой множества $f(X, [x_0^i])$. Нужно показать, что $\hat{z} \in f(X \setminus x_0, [x_0^i])$. Для этого достаточно указать такое отмеченное открытое множество W , что $f^{-1}(\hat{z}) \subset W \subset (X \setminus x_0, [x_0^i])$. Ввиду (4) и того факта, что каждое из множеств $f^{-1}(\hat{z})$, (x_0, Y) , $(X \setminus x_0, [x_0^i])$ отмечено, имеет место хотя бы одно из соотношений $f^{-1}(\hat{z}) \subset (X \setminus x_0, [x_0^i])$ или $f^{-1}(\hat{z}) \subset (x_0, Y)$. В первом из этих случаев лемма доказана. Покажем, что второй случай не может иметь места. Действительно, поскольку z есть внутренняя точка множества $f(X, [x_0^i])$, мы можем выбрать такую окрестность $\hat{W} \subset \hat{Z}$, что $\hat{z} \in \hat{W} \subset f(X, [x_0^i])$. Тогда ввиду (4) получим

$$f^{-1}(\hat{z}) \in f^{-1}(\hat{W}) \in f^{-1}[f(X, [x_0^i])] = (x_0, Y) \cup (X \setminus x_0, [x_0^i]).$$

В силу леммы 3 существует открытое отмеченное множество $(U, V) \subset Z$, где U открыто в X и V имеет вид (1), для которого

$$f^{-1}(\hat{z}) \subset (U, V) \subset f^{-1}(\hat{W}) \subset (x_0, Y) \cup (X \setminus x_0, [x_0^i]). \quad (5)$$

Ввиду леммы 1 и отмеченности (U, V) ни один из элементов x_i , участвующих в записи множества V в виде (1), не совпадает с x_0 . Следовательно, существует такая функция y' , что $y' \in V \cap [x_0^{-1}]$. Выберем некоторый $x' \in U$; $x' \neq x_0$. Тогда будем иметь

$$(x', y') \in (U, V) \setminus [(x_0, Y) \cup (X \setminus x_0, [x_0^i])],$$

что противоречит (5).

Теорема 4. Пусть точка $x_0 \in X$ не обладает счетной базой окрестностей. Тогда канонически замкнутое множество $f(X, [x_0^i]) \subset Z$ не есть множество типа G_δ .

Доказательство. Предположив противное, будем иметь для некоторой системы открытых в $\hat{Z}$ множеств $\{\hat{W}_k\}$ равенство $f(X, [x_0^i]) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \hat{W}_k$.

Ввиду (4) это означает, что

$$(x_0, Y) \cup (X \setminus x_0, [x_0^i]) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}(\hat{W}_k). \quad (6)$$

Используя лемму 3, представим каждое множество $f^{-1}(\hat{W}_k)$ в виде объединения отмеченных множеств $f^{-1}(\hat{W}_k) = \bigcup_{\alpha} (U_{\alpha k}, V_{\alpha k})$, где $U_{\alpha k} \subset X$

и $V_{\alpha k} \subset Y$ открыты, причем $V_{\alpha k}$ имеют вид (1). Выберем некоторую точку $(x_0, y_0) \in (x_0, Y)$. Для каждого k найдется некоторое множество $(U_{\alpha k}, V_{\alpha k})$,

* Здесь и дальше через $\bar{M}$ мы обозначаем замыкание множества M .

для которого $(x_0, y_0) \in (U_{\alpha k}, V_{\alpha k})$. Выберем для каждого k по одному такому множеству и обозначим его просто через (U_k, V_k) . Тогда $(x_0, y_0) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} (U_k, V_k) = (\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k, \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k)$. Поскольку $x_0 \in U_k$ при всех k и множества (U_k, V_k) отмечены, мы заключаем на основании леммы 1, что элемент x_0 не участвует в записи вида (1) для подмножеств V_k при всех k . Следовательно, мы можем выбрать некоторую функцию $y_1 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k \cap [x_0^{-i}]$. Ввиду отсутствия счетной базы окрестностей точки x_0 бикомпакта X , мы можем выбрать такую точку $x_1 \neq x_0$, что $x_1 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &\in \bigcap_{k=1}^{\infty} (U_k, V_k) \setminus [(x_0, Y) \cup (X \setminus x_0, [x_0^{-i}])] \subset \\ &\subset \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}(\hat{W}_k) \setminus [(x_0, Y) \cup (X \setminus x_0, [x_0^{-i}])], \end{aligned}$$

что противоречит (6).

Следствие 2. Пусть X есть обобщенный канторов дисконтинуум несчетного веса. Тогда $\hat{Z}$ — топологически однородный нульмерный диадический бикомпакт, не гомеоморфный никакому обобщенному канторову дисконтинууму.

Этим дается ответ на вопрос о существовании такого бикомпакта, поставленный в ⁽²⁾, стр. 223.

Доказательство. Как известно (⁽²⁾, теорема 5), в обобщенном канторовом дисконтинууме всякое канонически замкнутое подмножество имеет тип G_0 . Таким образом, предположение о том, что $\hat{Z}$ гомеоморфен некоторому обобщенному канторову дисконтинууму, противоречит теореме 4.

Остался открытым вопрос: будет ли продолжение канторова множества ретрактом некоторого обобщенного канторова дисконтинуума или хотя бы будет ли оно гомеоморфно некоторому обобщенному канторову дисконтинууму?

Московский инженерно-строительный институт
им. В. В. Куйбышева

Поступило
25 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Р. Сикорский, Булевы алгебры, М., 1969. ² Б. А. Ефимов, Тр. Московск. матем. общ., 14, 211 (1965).