Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 2

УДК 517.54 МАТЕМАТИКА

Ф. Г. АВХАДИЕВ, Л. А. АКСЕНТЬЕВ

ФУНКЦИИ КЛАССА БАЗИЛЕВИЧА В КРУГЕ И КОЛЬЦЕ

(Представлено академиком С. М. Никольским 14 V 1973)

В статье рассматривается класс функций И. Е. Базилевича $B_{\alpha,\beta}$, $\alpha>0$, $|\beta|<\infty$. Дается расширение этого класса на случай $-{}^1/_2\leqslant\alpha\leqslant0$, указывается новое представление, устанавливающее простую связь между $B_{\alpha,\beta}$ и почти выпуклыми функциями. Даются также распространение класса $B_{\alpha,\beta}$ на кольцо, различные частные случаи и применения.

1. Пусть α, $\alpha\geqslant-{}^1/_2$, β и a — вещественные постоянные. Функция $g(z)\in S^*$, т. е.

$$g(z)=z+c_2z^2+\ldots,\quad |z|<1,$$

причем $g(z)$ однолистно отображает $|z|<1$ на область, звездную относительно начала координат. Функция $p(z)$ регулярна в единичном круге $|\arg p(z)|\leqslant{}^1/_2\pi[1+\alpha(1-\mathrm{sign})]$ и

$$p(z)=1+ai+a_1z+a_2z^2+\ldots,\quad |z|<1.$$

Будем считать, что $f(z)\in B_{\alpha,\beta}$, если

$$f(z)=\left[\frac{\alpha+i\beta}{1+ai}\int\limits_{z_0}^{z}p(s)s^{-1+i\beta}g^{\alpha}(s)\,ds+C\right]^{1/(\alpha+i\beta)},\quad |z_0|,\ |z|<1,\tag{1}$$

где постоянная C подбирается из условия

$$f(z)=z+b_2z^2+\ldots,\quad |z|<1.$$

Имеем

$$(1+ai)C=p(z_0)g^{\alpha}(z_0)z_0^{i\beta}-\int\limits_0^{z_0}[(g(t)/t)^{\alpha}p(t)]'t^{\alpha+i\beta}\,dt.$$

Отметим, что для $\alpha>0$ можно взять $z_0=0$, $C=0$, но при $-{}^1/_2\leqslant\alpha\leqslant0$ под знаком интеграла в (1) появляется неинтегрируемая особенность в точке $s=0$, поэтому $z_0\neq0$.

И. Е. Базилевич ([1], [2]) установил, что при $\alpha>0$ ($z_0=C=0$) функции вида (1) являются однолистными. Недавно Д. В. Прохоров ([3]) (для частного случая $\beta=0$) и Шейл ([4]) доказали эквивалентность класса $B_{\alpha,\beta}$ с $\alpha>0$ и класса функций, которые характеризуются условием

$$\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{Re}\,\Phi(re^{i\theta})\,d\theta>-\pi,\quad 0<r<1;\tag{2}$$

здесь $0<\theta_2-\theta_1<2\pi$,

$$\Phi(z)=1+zf''(z)/f'(z)+(\alpha-1+i\beta)zf'(z)/f(z)\tag{3}$$

и дополнительно предполагается, что

$$f(z)f'(z)/z\neq0,\quad |z|<1.\tag{4}$$

В ([3]) и ([4]) построено новое доказательство однолистности функций $f(z)$ при условиях (2)–(4), когда $\alpha>0$. Отметим, что это доказательство проходит для любых вещественных α. Однако при $\alpha<-1/2$ условие (2) не будет содержательным. В самом деле, для любого $\alpha<-1/2$ имеем

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\Phi(re^{i\theta})\,d\theta=2\pi\alpha<-\pi,$$

и поэтому для любой регулярной функции $f(z)$, условие (2) будет нарушено при $\theta_2-\theta_1\geqslant 2\pi-\varepsilon$, где $\varepsilon=\varepsilon(\alpha, f)$ достаточно мало.

Учитывая также то, что эквивалентность классов $B_{\alpha,\beta}$ и (2)–(4) сохраняется и при $-1/2\leqslant\alpha\leqslant 0$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Функции класса* $B_{\alpha,\beta}$, *имеющие представление* (1), *однолистны в* $|z|<1$ *при* $\alpha\geqslant-1/2$.

Необходимо указать, что при $\alpha+i\beta=0$ нужно пользоваться представлением

$$f(z)=\exp\left(\frac{1}{1+ai}\int_{z_0}^{z}\frac{p(s)}{s}ds+C\right),\quad C=\frac{p(z_0)\ln z_0-\int\limits_0^{z_0}p'(t)\ln t\,dt}{1+ai}, \tag{1$_0$}$$

которое получается из (1) предельным переходом при $\alpha+i\beta\to 0$.

2. Пользуясь условием (2), можно получить множество эквивалентных представлений для функции $f(z)$. Самым простым из них будет представление

$$f(z)=[\varphi(z)]^{1/(\alpha+i\beta)}=[z^{\alpha+i\beta}\psi(z)]^{1/(\alpha+i\beta)}=z+b_2z^2+\ldots,\quad \alpha+i\beta\neq 0, \tag{5}$$

в котором $\psi(z)$ — регулярная в круге $|z|<1$ функция,

$$\psi(z)=1+c_1z+c_2z^2+\ldots,\quad \psi^{1/(\alpha+i\beta)}(0)=1, \tag{6}$$

а функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию (2) при

$$\Phi(z)=1+z\varphi''(z)/\varphi'(z).$$

Если $\alpha+i\beta=0$, то (5) нужно заменить представлением

$$f(z)=\exp\varphi(z)=z\psi(z). \tag{5$_0$}$$

Теорема 1 равносильна следующему утверждению.

Теорема 1'. *Функции* (5), (5$_0$) *при выполнении условий* (4), (6) *и неравенства*

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{Re}\left(1+z\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right)d\theta>-\pi,\quad z=re^{i\theta},\quad 0<\theta_2-\theta_1<2\pi, \tag{7}$$

для функции $\varphi(z)=\{z^{\alpha+i\beta}\psi(z),\ \alpha+i\beta\neq 0;\ \ln[z\psi(z)],\ \alpha+i\beta=0\}$ *являются однолистными в круге* $|z|<1$ *при* $\alpha\geqslant-1/2$.

Теорему 1' можно доказать и геометрически, рассматривая функцию $\varphi(z)$ в круге $|z|<1$ с разрезом по отрезку $[0,1]$. В силу условия (7), образом окружности $|z|=r<1$ без точки $z=r$ при отображении функцией $\varphi(z)$ будет простая незамкнутая почти выпуклая кривая, лежащая на римановой поверхности функции $w^{1/(\alpha+i\beta)}$. Отсюда легко получается однолистность $f(z)$, если представление (5) переписать в виде

$$f(z)=[\varphi(z)]^{1/[n(\alpha_0+i\beta_0)]}=[z^{\alpha_0+i\beta_0}\sqrt[n]{\psi(z)}]^{1/(\alpha_0+i\beta_0)}, \tag{5'}$$

где n — целое число, а $|\alpha_0|<1$, и воспользоваться следующим геометрическим фактом.

Лемма. *Регулярная в* $|z|<1$ *функция* $f(z)$ *вида* (5') *будет однолистной, если образом окружности* $|z|=r$, $0<r<1$, *без точки* $z=r$ *при отобра* *жении функцией*

$$(\varphi(z))^{1/n}=z^{\alpha_0+i\beta_0}(\psi(z))^{1/n}$$

окажется простая кривая, не выходящая за пределы бесконечного сектора с раствором $2\pi|\alpha_0|$ *и с вершиной в начале координат.*

Пусть D_f — образ $|z|<1$ при отображении функцией $f(z)$. Обозначим через $L_{\alpha,\beta}$ класс регулярных и однолистных в $|z|<1$ функций $f(z)$ таких, что область D_f, если $\alpha<0$, или дополнение D_f до полной плоскости, если $\alpha>0$, может быть покрыто семейством кривых $w=w(t)$ вида

$$w=w(t)=a(1+bt)^{1/(\alpha+i\beta)},\quad t\geqslant 0.$$

Пусть $\bar{L}_{\alpha,\beta}$ — замыкание $L_{\alpha,\beta}$.

На основании известного факта о совпадении класса почти выпуклых функций с классом $\bar{L}_{1,0}$ (см. ([5])), с использованием представления (5) при условии (7), получается

Теорема 2. *Классы* $B_{\alpha,\beta}$ *и* $\bar{L}_{\alpha,\beta}$ *эквивалентны* $(\alpha\geqslant-1/2)$.

Для случая $\beta=0$, $\alpha>0$ этот результат доказан Д. В. Прохоровым ([3]).

Теорема 2 дает возможность сравнения классов $B_{\alpha,\beta}$ при различных α и β. Справедливо, например,

Следствие. *Классы* $B_{\alpha,0}$ *существенно различны при различных* α, *т. е. существует такая функция* $f_{\alpha'}(z)\in B_{\alpha',0}$, *что* $f_{\alpha'}(z)\notin B_{\alpha,0}$ *для любого* $\alpha\neq\alpha'$.

3. Распространим теорему 1 на кольцо $q<|z|<1$. Пусть в этом кольце задана регулярная функция $f(z)$, которая конформно отображает кольцо на двусвязную область, причем окружности $|z|=q$ соответствует внутренняя граница, а окружности $|z|=1$ — внешняя и выполняются условия

$$\lim_{|z|\to q}\int_0^{2\pi}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)d\theta=\lim_{|z|\to q}\int_0^{2\pi}z\frac{f'(z)}{f(z)}d\theta=2\pi,\quad f'(z)f(z)\neq 0. \tag{8}$$

Образуем по $f(z)$ две функции

$$\Phi_l(z)=1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}+(\alpha_l-1+i\beta_l)z\frac{f'(z)}{f(z)},\quad l=q,1. \tag{9}$$

Справедлива

Теорема 3. *Регулярная функция* $f(z)$ *будет однолистной в кольце* $q<|z|<1$, *если выполняются условия* (8) *и неравенства*

$$\lim_{|z|\to q}[\operatorname{Re}\Phi_q(z)\operatorname{sign}\alpha_q]>0, \tag{10}$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{Re}\Phi_1(z)d\theta>-\pi,\quad 0<\theta_2-\theta_1<2\pi,\quad q<|z|<1, \tag{11}$$

где функции $\Phi_q(z)$ *и* $\Phi_1(z)$ *определяются по формулам* (9), $\alpha_1\geqslant-1/2$ *и* α_q — *любое вещественное число.*

Наметим схему доказательства. Простота внутренней границы области значений функции $f(z)$ следует из того, что функция

$$\varphi_q(z)=f^{\alpha_q+i\beta_q}(z),\quad \alpha_q+i\beta_q\neq 0,$$

будет удовлетворять условию выпуклости в достаточно узком кольце $q<|z|<q+\varepsilon$. Поэтому тем более будет справедливо соотношение

$$\operatorname{Re}z\frac{\varphi_q'(z)}{\varphi_q(z)}=\operatorname{Re}\left[(\alpha_q+i\beta_q)z\frac{f'(z)}{f(z)}\right]\gtrless 0,\quad \alpha_q\gtrless 0,\quad q<|z|<q+\varepsilon.$$

Простота внешней границы доказывается по аналогии с геометрическим доказательством теоремы 1′.

В пределе при $q \to 0$ получим расширенный класс Базилевича $B_{\alpha,\beta}$, $\alpha \geqslant -1/2$, в круге $|z|<1$.

Заметим также, что теорема остается справедливой, если неравенство (10) заменить каким-либо другим условием, обеспечивающим простоту внутренней границы.

4. В рассмотренных классах функций содержатся n-симметричные однолистные функции в круге, внешности круга и круговом кольце. Например, при $\alpha = \pm 1/n$, $\beta = 0$ с помощью замен $f_n(z) = (f(z^n))^{1/n}$ или $F_n(\zeta) = (f(\zeta^{-n}))^{-1/n}$ возникают достаточные условия однолистности

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re}\left(1+z\frac{f_n''(z)}{f_n'(z)}\right)d\theta > -\pi, \qquad \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re}\left(1+\zeta\frac{F_n''(\zeta)}{F_n'(\zeta)}\right)d\theta < \pi, \tag{12}$$

где $z=re^{i\theta}$, $0<r<1$, $\zeta=\rho e^{i\theta}$, $1<\rho<\infty$, $0<\theta_2-\theta_1<2\pi/n$, причем

$$f_n(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{2n+1}z^{2n+1} + \ldots$$

регулярна в $|z|<1$, а

$$F_n(\zeta) = \zeta + \frac{b_{n-1}}{\zeta^{n-1}} + \frac{b_{2n-1}}{\zeta^{2n-1}} + \ldots$$

регулярна в области $1<|\zeta|<\infty$.

Условиями однолистности таких функций и применением их к обратным краевым задачам ([6], [7]) теории аналитических функций занимались В. Н. Гайдук и В. П. Микка ([8]).

По аналогии с нашей статьей ([9]) можно описать условие однолистности (2) по областям в плоскости $\Phi(z)$ с применением подчиненных функций.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
20 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Е. Базилевич, Матем. сборн., 37, 3, 471 (1955). [2] И. Е. Базилевич, Матем. сборн., 64, 4, 628 (1964). [3] Д. В. Прохоров, Матем. заметки, 11, № 5, 509 (1972). [4] T. Sheil-Small, Quart. J. Math., 23, № 90, 135 (1972). [5] A. Bielecki, Z. Lewandowski, Ann. Pol. Math., 12, № 1, 61 (1962). [6] Г. Г. Тумашев, М. Т. Нужин, Обратные краевые задачи, Казань, 1965. [7] Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., 1963. [8] В. Н. Гайдук, Тр. семин. по краевым задачам, Казань, в. 8, 1971, стр. 55. [9] Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев, ДАН, 211, № 1 (1973).