

Р. В. АМБАРЦУМЯН

О СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЯХ ВОЛОКОН В  $R^n$ 

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 IV 1973)

Как по результатам, так и по методике, настоящая заметка примыкает к работам автора (<sup>1-3</sup>).

Ниже всегда  $G_n$  есть класс гиперплоскостей в  $R^n$ ,  $\mathcal{B}_g$  — класс ограниченных борелевских подмножеств данной  $g \in G_n$ . Рассматриваются случайные процессы вида  $N(B, \omega)$ , где  $N$  — неотрицательное целое число,  $B$  принадлежит  $\bigcup \mathcal{B}_g$ ,  $\omega$  — элементарное случайное событие.

В теории случайных множеств в  $R^n$  интерес представляют случайные процессы  $N(B, \omega)$ , которым соответствует случайное множество  $\mathfrak{M}(\omega) \subset R^n$  такое, что с вероятностью 1  $N(B, \omega)$  равно числу изолированных точек в  $\mathfrak{M}(\omega) \cap B$ .

Вопрос о нахождении условий существования таких  $\mathfrak{M}(\omega)$  в настоящей заметке не затрагивается, и поэтому существование  $\mathfrak{M}(\omega)$  с некоторыми желаемыми свойствами постулируется. Такой подход равнозначен рассмотрению случайных величин со значениями в некотором специально выбранном измеримом пространстве  $(\mathfrak{M}_n, \mathcal{A})$ , к построению которого мы и переходим.

Начнем с интегрально-геометрического определения волокна в  $R^n$ .

Предположим, что в  $R^n$  задано множество  $L$ , являющееся гладким взаимно однозначным образом открытого интервала. Через  $s$  будем обозначать координату на  $L$ , пропорциональную расстоянию вдоль  $L$ .

Пусть  $K_r = K_r(\mathcal{P}, g)$  есть  $(n-1)$ -мерный «круг» радиуса  $r$  с центром в  $\mathcal{P} \in g$ , лежащий на  $g \in G_n$ ,  $d\mathcal{P}$  — элемент  $(n-1)$ -мерной площади на  $g$ ,  $dg$  — элемент инвариантной (относительно эвклидовых движений  $R^n$ ) меры на  $G_n$ ,  $dK$  — элемент кинематической меры положений  $K_r$  в  $R^n$ . Имеем

$$dK = dg d\mathcal{P} = \cos \nu ds d\Omega d\mathcal{P},$$

так как  $\cos \nu ds d\Omega$  есть выражение  $dg$  в координатах  $(s, \Omega)$ , где  $\Omega$  — направление нормали к  $g$ ,  $d\Omega$  — элемент  $(n-1)$ -мерной площади на единичной сфере в  $R^n$ ,  $\nu$  — угол между  $\Omega$  и касательной к  $L$  в точке  $s = L \cap g$ .

Фиксируем  $s$  таким образом, чтобы в соответствующей точке  $L$  существовала кривизна  $\kappa(s)$ . Нетрудно устанавливается, что при  $r \rightarrow 0$

$$\int I_L \cos \nu d\Omega d\mathcal{P} = C_n \kappa^2(s) r^{n+1} + o(r^{n+1}); \quad (1)$$

здесь и ниже функция  $I_m = 1$ , если  $K_r$  имеет больше одной точки пересечения с множеством  $\mathfrak{M} \subset R^n$ ,  $I_m = 0$  в противном случае,  $C_n$  — константа, зависящая только от размерности  $n$ .

Формальным интегрированием (1) вдоль  $L$  получаем

$$\int I_L dg d\mathcal{P} = \frac{C_n}{2} r^{n+1} \int_L \kappa^2 ds + o(r^{n+1}). \quad (2)$$

Волокном (в  $R^n$ ) назовем конечной длины  $L \subset R^n$ , для которого выполняется асимптотическое равенство (2).

Полем волокон назовем такое множество  $\mathfrak{m} \subset R^n$ , пересечение которого с каждым открытым шаром в  $R^n$  можно представить в виде конечного числа непересекающихся волокон, концы которых не принадлежат  $\mathfrak{m}$ .

Через  $\mathfrak{M}_n$  обозначим класс всех полей волокон в  $R^n$ , через  $\mathcal{A}$  — минимальную  $\sigma$ -алгебру, относительно которой множества  $\{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_n; N(B, \mathfrak{m}) \geq k\}$ , где  $N(B, \mathfrak{m})$  равно числу изолированных точек в  $\mathfrak{m} \cap B$  измеримы для каждого  $k \geq 0$  и  $B \in \bigcup_g \mathcal{B}_g$ .

Случайным полем волокон в  $R^n$  назовем измеримое отображение  $\mathfrak{m}(\omega)$  какого-либо вероятностного пространства ( $\omega$  — элемент последнего) в  $(\mathfrak{M}_n, \mathcal{A})$ .

Распределением случайного поля волокон  $\mathfrak{m}(\omega)$  назовем индуцированную случайным полем  $\mathfrak{m}(\omega)$  меру  $P$  на  $\mathcal{A}$ .

Пусть  $\mathcal{A}_P$  — обычное расширение  $\mathcal{A}$  относительно меры  $P$  и

$$\mathcal{A}_0 = \bigcap \mathcal{A}_P,$$

пересечение берется по всем распределениям случайных полей волокон в  $R^n$ .

Обозначим через  $\mathcal{M}_n$  группу всех эвклидовых движений  $R^n$ .

Случайное поле волокон  $\mathfrak{m}(\omega) \subset R^n$  называется однородным и изотропным, если распределение  $M\mathfrak{m}(\omega)$  не зависит от  $M \in \mathcal{M}_n$  (в этом случае пишем  $P \in \mathcal{I}$ ). Здесь и ниже  $M\mathfrak{m}$  — образ множества  $\mathfrak{m}$  при движении  $M$ .

Обозначим через  $\mathcal{B}$  класс борелевских подмножеств  $\mathcal{M}_n$ .

Лемма 1. Для каждого  $A \in \mathcal{A}$  функция

$$I_A(M\mathfrak{m}) = \begin{cases} 1, & \text{если } M\mathfrak{m} \in A, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

измерима относительно  $(\mathfrak{M}_n \times \mathcal{M}_n, \mathcal{A}_0 \times \mathcal{B}_0)$ .

Эта лемма служит обоснованием интегрально-геометрического метода применяемого в настоящей заметке, а также в (1-3).

Лемма 2. Если  $\mathfrak{m}(\omega)$  — однородное и изотропное случайное поле волокон в  $R^n$ , то  $\mathfrak{m}(\omega) \cap g$  является случайным точечным полем (или точечным процессом, см. (1)) на  $g$  для любой  $g \in G_n$ .

Узлом поля волокон  $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_n$  назовем точку  $Q \in R^n$ , которая принадлежит замыканию больше чем одного волокна, причем  $[Q, \mathfrak{m}] \notin \mathfrak{M}_n$ . Каждый узел  $Q$  характеризуется фигурой, которую образуют исходящие из  $Q$  касательным к волокнам в точке  $Q$  направлениям лучи. Так, в случае  $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_2$  мы будем выделять узлы аффинно неэквивалентных типов  $X, Y, T$  (фигура  $X$  образована пересечением двух прямых).

Обозначим через  $q$  класс узлов, для которых упомянутые выше лучи попарно совпадают. Положим  $\Delta_u(\mathcal{P}) = \{K_r; \text{ центр } K_r \text{ принадлежит } S(u, \mathcal{P})\}$ ,  $S(u, \mathcal{P})$  — шар радиуса  $u$  с центром в  $\mathcal{P}$ .

Лемма 3. Пусть  $Q$  — узел поля волокон  $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_n$ . Если  $Q$  — единственный узел  $\mathfrak{m}$  в  $S(u, Q)$ , то

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-n} \int_{\Delta_u(Q)} I_{\mathfrak{m}} dK = \alpha(Q),$$

причем

$$\begin{aligned} 0 < \alpha(Q) < \infty, & \text{ если } Q \in q, \\ \alpha(Q) = \infty, & \text{ если } Q \notin q. \end{aligned}$$

Следствием леммы 3 является следующее предельное соотношение

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-n} \int_{\Delta_u(O)} I_{\mathfrak{m}} dK = \sum_{Q_i \in S(u, O)} \alpha(Q_i),$$

где  $O$  — начало координат в  $R^n$ .

Предположим, что задано случайное поле волокон  $\mathfrak{w}(\omega) \subset R^n$ ,  $P$  — его распределение. Проинтегрируем (3) по мере  $P$ , используя символ  $E$  для обозначения математического ожидания.

По теореме Фату и Фубини получаем

$$E \sum_{Q_i \in S(u, 0)} \alpha(Q_i) \leq \lim_{r \rightarrow 0} r^{-n} \int_{\Delta_u(O)} [EI_m] dK.$$

Если  $P \in \mathcal{J}$ , то тождественно по  $K$

$$EI_m(\omega) \equiv p(r),$$

где  $p(r)$  — вероятность того, что в  $(n-1)$ -мерном круге радиуса  $r$  на (любой)  $g \in G_n$  появится больше, чем одна точка пересечения  $g \cap \mathfrak{w}(\omega)$ .

Положим

$$\int_{\Delta_u(O)} dK = c_n u^n,$$

$c_n$  — константа, зависящая только от размерности  $n$ , после чего получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-n} p(r) \geq c_n^{-1} u^{-n} E \sum_{Q_i \in S(u, 0)} \alpha(Q_i).$$

**Следствие 1.** Если  $P \in \mathcal{J}$  и  $p(r) = o(r^n)$ , то с вероятностью 1  $\mathfrak{w}(\omega)$  не образует узлов в  $R^n$ .

В качестве стандарта будем рассматривать случай, когда на (любой)  $g \in G_n$  возникает пуассоновское точечное поле пересечений  $\mathfrak{w}(\omega) \cap g$ . В этом случае

$$p(r) = O(r^{2(n-1)}),$$

откуда следует, что условие следствия 1 в этом случае выполняется при  $n \geq 3$ .

При  $n=2$  и пуассоновском  $\mathfrak{w}(\omega) \cap g$   $p(r) = O(r^2)$  и, как показывают примеры в <sup>(2)</sup> и <sup>(3)</sup>,  $\mathfrak{w}(\omega)$  может образовывать узлы. Однако анализ, проведенный в этих работах, показывает, что с вероятностью 1  $\mathfrak{w}(\omega)$  в этом случае может образовывать лишь узлы типов  $X, Y, V$  и  $T$ .

Предположим, что фиксировано не образующее узлов  $\mathfrak{w} \in \mathfrak{M}_n$ . В этом случае из (1) вытекает, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-(n+1)} \int_{\Delta_u(O)} I_m dK = \sum_{L_t \subset S(u, 0)} \int_{L_t} \kappa^2 ds. \quad (4)$$

Если предположить, что  $P \in \mathcal{J}$  такова, что

$$P\{\mathfrak{w} \text{ не образует узлов в } R^n\} = 1,$$

то (4) можно проинтегрировать относительно  $P$ .

Аналогично предыдущему получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-(n+1)} p(r) \geq c_n^{-1} u^{-n} E \sum_{L_t \subset S(u, 0)} \int_{L_t} \kappa^2 ds.$$

**Следствие 2.** Если  $P \in \mathcal{J}$  и  $p(r) = o(r^{n+1})$ , то  $\mathfrak{w}(\omega)$  с вероятностью 1 состоит из прямолинейных волокон.

В частности, при пуассоновском точечном поле  $\mathfrak{w}(\omega) \cap g$ ,  $g \in G_n$ , следствие 2 гарантирует прямолинейные волокна при  $n \geq 4$ .

В заключение сформулируем наиболее наглядные результаты в виде теоремы.

**Т е о р е м а.** Пусть  $\mathfrak{m}(\omega)$  — однородное и изотропное поле волокон в  $R^n$  такое, что  $\mathfrak{m}(\omega) \cap g$  есть пуассоновское точечное поле на  $g \in G_n$ . Тогда с вероятностью 1:

- 1) при  $n=2$   $\mathfrak{m}(\omega)$  образует лишь узлы  $X, Y, T$  и  $V$ ;
- 2) при  $n \geq 3$   $\mathfrak{m}(\omega)$  не образует узлов;
- 3) при  $n \geq 4$   $\mathfrak{m}(\omega)$  имеет лишь прямолинейные волокна.

Отметим, что легко построить примеры  $\mathfrak{m}(\omega)$ , удовлетворяющие условию теоремы и имеющие лишь прямолинейные волокна при всех  $n \geq 2$ . Однако у нас отсутствуют примеры соответствующих  $\mathfrak{m}(\omega)$  с криволинейными волокнами при  $n=2, 3$ .

Институт математики  
Академии наук АрмССР  
Ереван

Поступило  
24 III 1973

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> R. V. Ambartzumian, Palm Distributions and Superpositions of Independent Point Processes in  $R^n$ . Stochastic Point Processes: statistical Analysis, Theory and Applications, Interscience, 1972. <sup>2</sup> R. V. Ambartzumian, Proc. VI Berkeley Symposium on Probability and Math. Statistics, 3, 1972. <sup>3</sup> Р. В. Амбарцумян, Теор. вероятн. и ее применения, № 3, 1973.