

Г. П. АМИРДЖАНОВ, Б. Э. ШАПИРОВСКИЙ

О ВСЮДУ ПЛОТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 8 V 1973)

Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$, ξ — семейство подмножеств из X и τ — кардинальное число. Положим

$$\xi^\tau = \{B: B = \bigcap \{C: C \in \xi'\}, \xi' \subset \xi, |\xi'| \leq \tau\},$$

$$\xi_\tau = \{B: B = \bigcup \{C: C \in \xi'\}, \xi' \subset \xi, |\xi'| \leq \tau\}.$$

Через $c(X)$, $t(X)$, $s(X)$, $\pi w(X)$ и $w(X)$ обозначаются число Суслина, теснота ⁽³⁾, плотность, π -вес ⁽⁴⁾ и вес пространства X соответственно, через $\psi(B, X)$ и $\chi(B, X)$ — псевдохарактер и характер множества B в X соответственно.

Будем говорить, что семейство η плотно относительно семейства ξ , если для всякого непустого $A \in \xi$ существует непустое $B \in \eta$, для которого $B \subset A$. Назовем семейство ξ π -сетью в X , если ξ плотно относительно семейства всех открытых в X множеств. Таким образом, γ — π -база в X' ⁽⁴⁾, если γ — π -сеть в X' , состоящая из открытых в X' множеств. Будем говорить также, что η — сеть относительно семейства ξ , если для всякого $A \in \xi$ и всякого $x \in A$ существует $B \in \eta$ такое, что $x \in B \subset A$. Следовательно, ξ — сеть в X ⁽⁴⁾, если ξ — сеть относительно семейства всех открытых в X множеств.

С помощью ⁽⁶⁾ легко получаем

Утверждение 1. Пусть X — T_2 -пространство точечно-счетного типа.

Тогда семейство всех бикомпактов счетного характера является сетью относительно семейства всех G_δ -множеств из X .

Утверждение 2. Пусть γ — π -база в X и A — нигде не плотное в X множество.

Тогда существует дизъюнктное семейство $\gamma' \subset \gamma$ такое, что $\bar{U} = \bigcup \{U: U \in \gamma'\}$ всюду плотно в X и $A \subset X \setminus \bar{U}$.

Теорема 1. Пусть X — T_2 -пространство точечно-счетного типа и ξ — сеть в X .

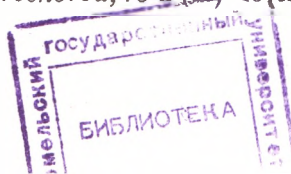
Тогда $w(X) \leq |\xi|^{\aleph_0}$.

Доказательство. Положим $\xi = \{[A]: A \in \xi^{\aleph_0}\}$. Тогда в силу утверждения 1 $\xi = \{H \in \xi: \text{существует бикомпакт } F_H \text{ счетного характера такой, что } H \subset F_H\}$ — сеть в X . Поскольку X — T_2 -пространство, то семейство $\{X \setminus [A]: A \in \xi\}$ является псевдобазой в X для всякого бикомпакта $H \subset X$. Следовательно, если $H \in \xi$, то $\chi(H, F_H) = \psi(H, F_H) \leq \psi(H, X) \leq |\xi|$, и так как $\chi(H, X) \leq \chi(H, F_H) \chi(F_H, X)$ ⁽⁶⁾, то $\chi(H, X) \leq |\xi|$. Для всякого $H \in \xi$ зафиксируем γ_H — базу H в X , для которой $|\gamma_H| \leq |\xi|$. Нетрудно проверить, что $\gamma = \bigcup \{\gamma_H: H \in \xi\}$ — база в X и $|\gamma| \leq |\xi| \leq |\xi|^{\aleph_0}$.

Теорема 2. Пусть X — T_2 -пространство точечно-счетного типа. Тогда $w(X) \leq s(X)^{\aleph_0}$.

Доказательство. Пусть $[S] = X$ и $|S| = s(X)$. Положим $\eta = \{[A]: A \subset S, |A| \leq t(X)\}$. Легко показать, используя утверждение 1, что $\xi = \eta^{\aleph_0}$ — сеть в X . Но тогда по теореме 1 $w(X) \leq |\xi|^{\aleph_0} \leq |\eta|^{\aleph_0} \leq s(X)^{\aleph_0}$.

Следствие 1. Если X — T_2 -пространство точечно-счетного типа со счетной теснотой, то $w(X) \leq s(X)$.



Утверждение 3. Пусть всякое нигде не плотное в X множество сепарабельно и кроме того выполняется хотя бы одно из следующих условий: а) X не содержит изолированных точек; б) $s(X) \leq \aleph_0$. Тогда $s(A) \leq \aleph_0$ и $s(A) \leq \aleph_1$ для всех $A \subset X$.

Доказательство. В каждом из случаев а), б) $s(A) \leq \aleph_0$ для всех $A \subset X$ (см. ⁽⁹⁾), и, следовательно, условия утверждения 3 выполняются для каждого $A \subset X$. Поэтому достаточно показать, что $s(X) \leq \aleph_1$. Действительно, если U открыто в X и $s(U) > \aleph_0$, то существует $A \subset U$ такое, что $s(A) = \aleph_1$. Значит, существует непустое открытое в X множество $V \subset [A]$ и, следовательно, $\bar{V} = V \cap U \neq \Lambda$ и $s(\bar{V}) \leq \aleph_1$. Таким образом, $\xi = \{U: U \text{ открыто в } X, s(U) \leq \aleph_1\}$ — π -база в X . Тогда по утверждению 2 существует $U \in \xi_{\aleph_0}$ такое, что $[U] = X$, откуда и получаем $s(X) \leq \aleph_1$.

Теорема 3. Пусть всякое нигде не плотное в X множество счетно, и, кроме того, выполняется хотя бы одно из следующих условий: а) X не содержит изолированных точек; б) $s(X) \leq \aleph_0$. Тогда X — наследственно финально-компактно и $s(A) \leq \aleph_1$ для всех $A \subset X$.

Доказательство. В силу утверждения 3 достаточно показать, что X финально-компактно. Действительно, пусть γ — открытое покрытие X . Так как $\xi = \{U: U \text{ открыто в } X \text{ и существует } V_U \in \gamma, \text{ для которого } U \subset V_U\}$ — база в X , то по утверждению 2 существует дизъюнктивное подсемейство $\mu \subset \xi$, для которого $F = X \setminus \bigcup \{U: U \in \mu\}$ нигде не плотно в X и, следовательно, счетно. Ясно, что тогда $\gamma' = \{V_x: x \in F\} \cup \{V_U: U \in \mu\}$ — искомое счетное подпокрытие, где $x \in V_x \in \gamma$ и $U \subset V_U \in \gamma$ для всех $x \in F$ и $U \in \mu$. Доказательство завершено.

Теорема 4 ($\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$). Пусть X — полное в смысле Чеха пространство, всякое нигде не плотное подмножество которого счетно, и пусть, кроме того, выполняется хотя бы одно из следующих условий: а) X не содержит изолированных точек; б) $s(X) \leq \aleph_0$. Тогда X — наследственно финально-компактно и наследственно сепарабельное пространство.

Доказательство. Положим $\bar{U} = \bigcup \{U: U \text{ открыто в } X \text{ и } s(U) \leq \aleph_0\}$ и $H = X \setminus \bar{U}$. Ясно что $s(\bar{U}) \leq \aleph_0$. Поэтому, если $H \neq \Lambda$, то $s(H) > \aleph_0$ и в силу теоремы 3 $s(H) = \aleph_1$. Кроме того H наследственно финально-компактно и, следовательно, с первой аксиомой счетности. Значит, $H = [\{y_\alpha: \alpha < \omega_1\}] = \bigcup \{F_\beta: \beta < \omega_1\}$, где $F_\beta = [\{y_\alpha: \alpha < \beta\}]$. Поскольку $F_\beta \cap \bar{U} = \Lambda$ и $s(F_\beta) \leq \aleph_0$, то $|F_\beta| \leq \aleph_0$ и $|H| = \aleph_1$. Но тогда в H существует изолированная точка x_0 ⁽¹⁰⁾ и, следовательно, $\bar{U} \cup \{x_0\}$ — открытое в X сепарабельное множество, что противоречит определению $\bar{U}$. Таким образом, $\bar{U} = X$ и $s(X) \leq \aleph_0$. Поскольку условия теоремы 4 наследуются по всем замкнутым подмножествам, то в силу ^(3, 9) X наследственно сепарабельно.

Говорят, что X — пространство со свойством Бэра, если пересечение любого счетного семейства открытых всюду плотных в X множеств всюду плотно в X . Полные в смысле Чеха пространства, G_δ -множества регулярных счетно-компактных пространств, а также G_δ -множества базисно-компактных пространств обладают свойством Бэра. Говорят также, что функция f , заданная на семействе ξ , является функцией выбора на ξ , если $f(A) \in A$ для всех $A \in \xi$. Положим $f(\xi) = \{f(A): A \in \xi\}$.

Утверждение 4. Семейство ξ — π -сеть в X тогда и только тогда когда $[f(\xi)] = X$ для всякой функции выбора f на ξ .

Лемма 1. Пусть X — пространство со свойством Бэра, $\pi w(X) \leq \aleph_1$, $\xi = \{A_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ и η — семейства нигде не плотных в X множеств и, кроме того, η плотно относительно семейства всех G_δ -множеств из X .

Тогда в X существует дизъюнктивная π -сеть $\xi \subset \eta$ такая, что $|\{B \in \xi: B \cap A_\alpha \neq \Lambda\}| \leq \aleph_0$ для всех $A_\alpha \in \xi$.

Доказательство. Пусть $\gamma = \{U_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ — π -база в X , и пусть уже определено дизъюнктивное семейство $\{B_\alpha: \alpha < \alpha' < \omega_1\} \subset \eta$. По условию $(U_{\alpha'} \setminus \bigcup \{B_\alpha: \alpha < \alpha'\}) \setminus \bigcup \{A_\alpha: \alpha < \alpha'\} = G_{\alpha'} \neq \Lambda$ и существует $C \in \eta$ такое что $\Lambda \neq C \subset G_{\alpha'}$. Положим $C = B_{\alpha'}$. Нетрудно проверить, что построенное таким образом семейство $\xi = \{B_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ — искомая π -сеть.

Предложение 1 (CH). Пусть X — пространство со свойством Бэра, $w(X) \leq 2^{\aleph_0}$, η — семейство нигде не плотных в X множеств U , кроме того, η плотно относительно семейства всех G_δ -множеств из X .

Тогда в X существует дизъюнктивная π -сеть $\xi \subset \eta$ со следующим свойством: если $Y \subset X$, $c(Y) \leq \aleph_0$ и f — функция выбора на семействе $\lambda = \{Y \cap B : B \in \xi\}$, то $f(\lambda)$ — наследственно финально-компактно и каждое нигде не плотное в Y множество $C \subset f(\lambda)$ счетно.

Доказательство. Пусть γ — база в X , $|\gamma| \leq 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ и $\xi = \{[U] \setminus U : U \in \gamma_{\aleph_0}\}$. Так как X , ξ и η отвечают условиям леммы 1, то в X существует дизъюнктивная π -сеть $\xi \subset \eta$ такая, что $|\{B \in \xi : B \cap A \neq \emptyset\}| \leq \aleph_0$ для всех $A \in \xi$. Если теперь $Y \subset X$, $c(Y) \leq \aleph_0$, $\gamma = \{U \cap Y : U \in \gamma\}$ и C нигде не плотно в Y , то по утверждению 2 существует $\tilde{U} \in \tilde{\gamma}_{\aleph_0}$ такое, что $C \subset Y \setminus \tilde{U}$ и $Y \subset [\tilde{U}]$. Поэтому, существует $A \in \xi$, для которого $C \subset A$, и, следовательно, $|\{B \in \xi : B \cap C \neq \emptyset\}| \leq \aleph_0$ для всякого C , нигде не плотного в Y . Значит, если f — функция выбора на $\lambda = \{Y \cap B : B \in \xi\}$, то всякое нигде не плотное в Y множество $G \subset f(\lambda)$ счетно. Покажем, что $c(f(\lambda)) \leq \aleph_0$. Действительно, существуют P_1 и P_2 такие, что $f(\lambda) = P_1 \cup P_2$, $[P_1]_\gamma$ — каноническое в Y множество и P_2 нигде не плотно в Y . Так как $c(P_1) \leq c([P_1]_\gamma) \leq c(Y) \aleph_0$, а P_2 счетно, то $c(f(\lambda)) \leq \aleph_0$ и, в силу теоремы 3, $f(\lambda)$ наследственно финально-компактно.

Аналогично доказывается

Предложение 1' (CH). Пусть X — пространство со свойством Бэра, $\pi w(X) \leq 2^{\aleph_0}$, $c(X) \leq \aleph_0$, η — семейство нигде не плотных в X множеств U , кроме того, η плотно относительно семейства всех G_δ -множеств из X .

Тогда в X существует дизъюнктивная π -сеть $\xi \subset \eta$ со следующим свойством: если f — функция выбора на ξ , то $f(\xi)$ — всюду плотное наследственно финально-компактное множество, каждое нигде не плотное подмножество которого счетно.

При $\eta = \{\{x\} : x \in X\}$, из предложений 1 и 1' сразу следует

Теорема 5 (CH). Пусть X — пространство со свойством Бэра и $w(X) \leq 2^{\aleph_0}$.

Тогда X содержит всюду плотное подмножество Y со следующим свойством: если $Z \subset Y$ и $c(Z) \leq \aleph_0$, то Z наследственно финально-компактно и всякое его нигде не плотное подмножество счетно.

Теорема 5' (CH). Пусть X — пространство со свойством Бэра, $\pi w(X) \leq 2^{\aleph_0}$ и $c(X) \leq \aleph_0$.

Тогда X содержит всюду плотное наследственно финально-компактное множество, каждое нигде не плотное подмножество которого счетно.

Предложение 2. Пусть X — T_2 -пространство точечно-счетного типа без изолированных точек, η — семейство всех нигде не плотных в X бикомпактов счетного характера и δ — семейство всех G_δ -множеств из X .

Тогда: 1) если $c(X) \leq \aleph_0$, то η — сеть относительно δ ; 2) если $t(X) \leq \aleph_0$, то η плотно относительно δ .

Доказательство. 1) Если $x \in X$ и X — T_2 -пространство, то очевидно, что $\gamma_x = \{U : x \notin [U], U \text{ открыто в } X\}$ — π -база в X , и из утверждения 2 легко следует, что существует нигде не плотное G_δ -множество $G_\delta \ni x$, откуда в силу утверждения 1 и вытекает требуемое заключение (см. также (7)). 2) Если F — бикомпакт и $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ — семейство открытых в X множеств такое, что $U_\alpha \supset [U_\beta]$ и $[U_\alpha] \neq [U_\beta]$ для всех $\alpha < \beta < \omega_1$, то $t(X) > \aleph_0$, так как в противном случае $\cap \{X \setminus [U_\alpha] : \alpha < \omega_1\} = \cap \{X \setminus U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ замкнуто, но не финально-компактно. Отсюда легко получаем, что в F существует замкнутое нигде не плотное G_δ -множество, и в силу утверждения 1 доказательство завершено.

Из теорем 2 и предложений 1, 1' и 2 вытекает

Теорема 6 (CH). Пусть X — T_2 -пространство точечно-счетного типа со свойством Бэра (например, пространство, полное в смысле Чеха), $\pi w(X) \leq 2^{\aleph_0}$ и $c(X) \leq \aleph_0$.

Тогда в X существует дизъюнктивная π -сеть со следующими свойствами:

- 1) ξ состоит из бикомпактов счетного характера;
- 2) $\bigcup \{F: F \in \xi\}$ финально-компактно;
- 3) если f — функция выбора на ξ , то $f(\xi)$ — всюду плотное наследственно финально-компактное множество, каждое нигде не плотное подмножество которого счетно.

Из теоремы 6 и предложения 1 следует

Теорема 7 (СН). Пусть X — T_2 -пространство точечно-счетного типа со свойством Бэра (например, пространство, полное в смысле Чеха), $t(X) \leq \aleph_0$ и $s(X) \leq 2^{\aleph_0}$.

Тогда X содержит всюду плотное подмножество Y со следующими свойствами:

- 1) $\psi(x, Y) \leq \aleph_0$ для всех $x \in Y$;
- 2) если $Z \subset Y$ и $s(Z) \leq \aleph_0$, то Z — наследственно финально-компактное множество, каждое нигде не плотное подмножество которого счетно.

Требование счетности тесноты в теореме 7 существенно, поскольку в $\beta N \setminus N$ $\psi(Y) > \aleph_0$ у любого всюду плотного подмножества Y , хотя $w(\beta N \setminus N) \leq 2^{\aleph_0}$.

Из теоремы 6 и теоремы 5 из ⁽⁸⁾ вытекает

Теорема 7' (СН). Полное в смысле Чеха пространство с условием Суслина и счетной теснотой содержит всюду плотное наследственно финально-компактное множество, каждое нигде не плотное подмножество которого счетно.

Теорема 8 (СН). Пусть X — T_2 -пространство точечно-счетного типа со свойством Бэра и $|X| \leq 2^{\aleph_1}$.

Тогда в X содержится всюду плотное множество Y со следующими свойствами:

- 1) Y — пространство с точечно-счетной базой;
- 2) если $Z \subset Y$ и $s(Z) \leq \aleph_0$, то Z — наследственно финально-компактное множество, каждое нигде не плотное подмножество которого счетно.

Для доказательства теоремы 8 необходимо воспользоваться предложением 1 и рассуждением, проведенным в теореме 4 из ⁽⁵⁾.

Необходимо отметить, что есть модель, в которой выполняется (СН) и существует несепарабельный бикомпакт с условием Суслина, счетной теснотой и мощности $\leq 2^{\aleph_0}$ ⁽¹¹⁾. Таким образом, поскольку результат о существовании в бикомпакте с условием Суслина и веса $\leq 2^{\aleph_0}$ наследственно финально-компактного всюду плотного подмножества (теорема 5') верен в любой модели, в которой выполняется СН, он не может быть усилен за счет доказательства существования счетного всюду плотного подмножества.

В связи с п. 1) теорем 6—8 естественно возникает следующий

Вопрос. Каждый ли бикомпакт со счетной теснотой имеет точку с первой аксиомой счетности? Верно ли это в предположении СН?

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность В. И. Пономареву за помощь в работе и полезные советы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. В. Архангельский, ДАН, 126, № 2 (1959). ² А. В. Архангельский, ДАН, 192, № 2 (1970). ³ А. В. Архангельский, ДАН, 199, № 6 (1971). ⁴ В. И. Пономарев, ДАН, 166, № 2 (1966). ⁵ В. И. Пономарев, ДАН, 174, № 6 (1967). ⁶ М. М. Чобан, Вестн. Моск. ун-в., № 6, 87 (1967). ⁷ Г. П. Амирджанов, ДАН, 209, № 2 (1973). ⁸ Б. Э. Шапировский, ДАН, 202, № 4 (1972). ⁹ Б. Э. Шапировский, ДАН, 206, № 3 (1972). ¹⁰ E. Čech, B. Pospíšil, Publ. faculté Sci. Univ. Masaryk, Brno, 258, 1 (1938). ¹¹ S. Tennenbaum, Proc. Am. Nat. Acad. Sci., 59, № 1 (1968).