Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 2

УДК 551.551.8

ГЕОФИЗИКА

О. С. БЕРЛЯНД, Д. А. СЕВЕРОВ

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРИМЕСИ НА ЕЕ КОНЦЕНТРАЦИЮ В СВОБОДНОЙ АТМОСФЕРЕ

(Представлено академиком Е. К. Федоровым 7 V 1973)

Авторы ряда работ ([1-3]) полагают целесообразным применять телеграфное уравнение для описания турбулентного рассеяния примеси в атмосфере. В этих работах приводится вывод одномерного уравнения рассеяния частиц в струйках двух типов противоположным направлением скоростей $\pm u$ и частотой перехода a частицы между струйками, а также приводятся решения некоторых задач рассеяния примеси, для которых характерно присутствие слагаемого $^1/_2 e^{-at}[f(z-ut)+f(z+ut)]$, где $f(z)$ — начальное условие задачи ([2]). В случае, когда задается начальный мгновенный точечный источник ([3]) $f(z)=\delta(z)$, где $\delta(z)$ — функция Дирака, фронт распространения примеси имеет характер дельта-функции и переносит конечное количество примеси. В ([5]) рассмотрена задача о распространении примеси от приподнятого мгновенного точечного источника в приземном слое атмосферы, где частота a увеличивается с уменьшением высоты.

В приведенном решении количество примеси на фронте становится равным нулю на поверхности земли, при этом на высотах, отличных от нуля, количество примеси, переносимой фронтом, по-прежнему не равно нулю. Таким образом, при задании разрывного начального условия $f(z)$ получается разрывное решение. Можно, однако, учесть то обстоятельство, что при малых начальных размерах источника на рассеяние примеси оказывает большое влияние мелкомасштабная турбулентность (масштаб турбулентности меньше размера облака), а в этом случае, по-видимому, возможно описание турбулентной диффузии по аналогии с молекулярной диффузией ([4]).

Поставив, таким образом, параметры задачи a и u в зависимость от размеров облака, т. е. представив их как функции зависимой переменной, мы получили бы нелинейное уравнение. Такая постановка задачи представляется излишне усложненной. Известно, например, что внутри облака, где концентрация не слишком мала, распределение ее удовлетворительно описывается параболическим уравнением диффузии ([4]). Поэтому естественно предположить, что в центральной части облака при больших концентрациях примесь рассеивается по закону, описываемому параболическим уравнением диффузии, а на периферии (например, кромка облака) примесь распространяется с конечной скоростью и ее рассеяние описывается гиперболическим равнением.

В данной работе решается одномерная двухслойная задача при следующих предположениях:

При $h_1 \leqslant z < \infty$

$$\partial q_1/\partial t = k\,\partial^2 q_1/\partial z^2, \tag{1}$$

$$q_1(z, 0)=\delta(z-h), \quad \text{где} \quad h>h_1;$$

При $0 \leqslant z \leqslant h_1$

$$\partial^2 q_2/\partial t^2 + 2a\,\partial q_2/\partial t = u^2\,\partial^2 q_2/\partial z^2, \tag{2}$$

$$q_2(z,\ 0)=0,\ \partial q_2/\partial t|_{t=0}=0, \quad \partial q_2/\partial z|_{z=0}=0.$$

При надлежащем выборе величины h_1 можно пользоваться усредненными значениями параметров a и u в (2). Величину h_1 в принципе можно определить, решая обратную задачу, т. е. по известным экспериментальным значениям.

В точке $z=h_1$ сшиваем решения (1) и (2) по значению концентрации и по потоку примеси. Чтобы найти выражение для сохранения потока через точку h_1, проинтегрируем уравнение сохранения потока $\partial q_i/\partial t+\partial S_i/\partial z=0$ (S_i — поток примеси, $i=1, 2$) и уравнения (1) и (2) по z в пределах от z до ∞ и от 0 до z соответственно. Используя граничные условия для q_1 и q_2 и переходя от функции $q_i(z, t)$ к ее изображению по Лапласу $g_i(z, p)$, получим условие неразрывности потока

$$kg_{1z}'=[u^2/(p+2a)]g_{2z}'|_{z=h_1}. \qquad (3)$$

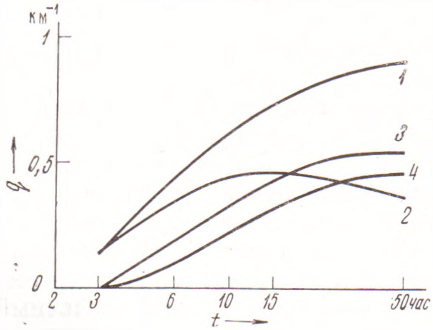

Рис. 1. Зависимость концентрации примеси на поверхности Земли ($z=0$) от времени; *1, 3* – расчет по формуле (6); *2, 4* – по (7); *1, 2* – $a=1$ час$^{-1}$, $k=0{,}036$ км^2/час, $u=0{,}268$ км/час, $h_1=0{,}537$ км, $h=1{,}037$ км; *3, 4* – $a=0{,}1$ час$^{-1}$, $k=0{,}0142$ км^2/час, $u=0{,}168$ км/час, $h_1=0{,}337$ км, $h=1{,}037$ км

Решение (1), (2), (3) для области $0\leqslant z\leqslant h_1$ имеет вид

$$g(z, p)=g_2=2(pk)^{-1/2},$$

$$\mathrm{ch}\{zu^{-1}[p(p+2a)]^{1/2}\}\exp\{-(p/k)^{1/2}\cdot(h-h_1)\}\cdot\varphi^{-1}, \qquad (4)$$

$$\varphi=\varphi_++\varphi_-, \quad \varphi_\pm=\{1\mp u[k(p+2a)]^{-1/2}\}\cdot\exp\{\mp[p(p+2a)]^{1/2}h_1u^{-1}\}.$$

Рассмотрим решение (4) в точке $z=0$:

$$g_2=2(pk)^{-1/2}\exp\{-(p/k)^{1/2}(h-h_1)\}\times$$

$$\times\varphi_-^{-1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n r^n\right),$$

$$r=\exp\{-2h_1u^{-1}[p(p+2a)]^{1/2}\}\,[(k(p+2a))^{1/2}-u]/[(k(p+2a))^{1/2}+u], \qquad (5)$$

$$|r|<1 \quad \text{при} \quad -\pi/2\leqslant\arg p\leqslant\pi/2.$$

Из выражения (5) следует, что первое слагаемое в оригинале отлично от нуля при $t>h_1/u$, второе слагаемое $t>3h/u$ и т. д.

Воспользовавшись обратным преобразованием ([5])

$$f_1=\exp(-at)I_0\left[a\left(t^2-\frac{h_1^2}{u^2}\right)^{1/2}\right]\div[p(p+2a)]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{h_1}{u}(p(p+2a))^{1/2}\right\},$$

$$t>h_1/u;$$

$$f_1=0, \quad t<h_1/u;$$

$$f_2=\left[\frac{(h-h_1)^2}{2kt}+4at-3\right]\frac{h-h_1}{4(\pi kt^5)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(h-h_1)^2}{4kt}\right\}\div$$

$$\div(p+2a)\exp\left[-(h-h_1)\left(\frac{p}{k}\right)^{1/2}\right];$$

$$f_3=\exp[-2at]\left[\frac{1}{(\pi kt)^{1/2}}-\frac{u}{k}\exp\left[\frac{u^2t}{k}\right]\mathrm{erfc}\left(\frac{u}{k^{1/2}}\sqrt{t}\right)\right]\div\frac{1}{(k(p+2a))^{1/2}+u}$$

Запишем решение в точке:

$$q(0,t)=2\int_{h_1/u}^{t}f_3(t-\tau)\int_{h_1/u}f_1(\xi)f_2(\tau-\xi)\,d\xi\,d\tau. \qquad (6)$$

Расчеты по формуле (6) велись и при $t > 3h_1/u$.

Для оценки ошибки в вычислениях в формуле (14) использовались два члена разложения в ряд по r. Ошибка при этом получилась порядка 10% даже при достаточно больших t.

Результаты вычислений по формуле (6) сопоставлялись с решением уравнения (1) для условий

$$q(z,\,0)=\delta(z-h); \quad \partial q/\partial z\,|_{z=0}=0, \quad 0\leqslant z<\infty,$$

в точке $z=0$ для различных значений t

$$q(0,t)=\frac{1}{(\pi k t)^{1/2}}\exp\left(-\frac{h^2}{4kt}\right) \tag{7}$$

(рис. 1, 2).

Средние значения параметров $a\approx1{,}0$ час$^{-1}$, $u\approx0{,}2$ км/час определялись из условия совпадения концентраций, рассчитанных по формулам (6) и (7), в точке $t=t_0$, а также с учетом изменения величины k: 0,0036 км^2/час$\leqslant k\leqslant$0,036 км^2/час.

Положив в (4) $p\gg a$, что соответствует малым значениям t, и ограничимся вторым членом разложения в ряд $(1+2a/p)^{1/2}\approx1+ap$, тогда в оригинале получим

$$q=q_++q_-, \quad t_+=(h_1+z)/u, \quad t_-=(h_1-z)/u, \quad q_\pm|_{t<t_\pm}=0, \tag{8}$$

$$q_\pm|_{t>t_\pm}=[4\pi k(t-t_\pm)]^{-1/2}\times\exp\{-at_\pm-(h-h_1)^2\times[4k(t-t_\pm)]^{-1}\}.$$

По формуле (8) и решению уравнения диффузии

$$q=\left(\frac{1}{2(\pi k t)^{1/2}}\times\left[\exp\left(-\frac{(z-h)^2}{4kt}\right)+\exp\left(-\frac{(z+h)^2}{4kt}\right)\right]\right) \tag{9}$$

для значений t=0,5 час, 1,0 час, 1,5 час для различных значений $0\leqslant z\leqslant0{,}5$ км была рассчитана концентрация. Результаты вычислений приведены на рис. 2.

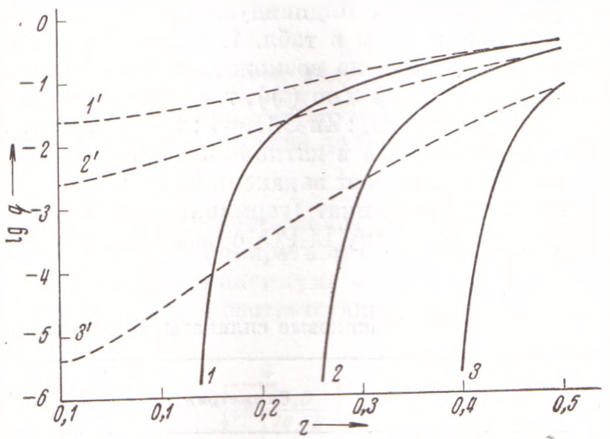

Рис. 2. Распределение концентрации примеси по высоте при малых значениях времени. $a=1$ час$^{-1}$, $u=0{,}268$ км/час, $h_1=0{,}5$ км, $h=1$ км, $k=0{,}036$ км^2/час; *1–3* – расчет по формуле (8), *1'–3'* – по (9), *1, 1'* – t=1,5 час.; *2, 2'* – 1 час; *3, 3'* – 0,5 час.

Наша постановка задачи является неполной, так как не учтена верхняя кромка облака (трехслойная задача).

Авторы выражают благодарность Л. К. Эрдману, В. Н. Петрову, А. Я. Прессману за ценные замечания и А. Г. Башиловой за проведенные вычисления.

Институт прикладной геофизики
Москва

Поступило
23 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. И. Давыдов, ДАН, 2, № 7 (1935). [2] Е. С. Ляпин, Метеорология и гидрология, № 5 (1948). [3] А. С. Монин, Изв. АН СССР, сер. геофизич., № 3 (1955). [4] Атмосферная диффузия загрязнения воздуха, ИЛ, 1962. [5] Г. Бейтмен, А. Эрдейн, Таблицы интегральных преобразований, 1, «Наука», 1969.