

В. В. СТАРКОВ

ОПРОВЕРЖЕНИЕ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЫ О ПОДЧИНЕНИИ ДЛЯ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 16 V 1973)

Пусть S_α^* , $0 \leq \alpha < 1$, — класс звездообразных функций порядка α , т. е. функций $f(z)$, регулярных и однолистных в единичном круге $\Delta = \{z: |z| < 1\}$, таких, что $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $\operatorname{Re} \{zf'(z)/f(z)\} \geq \alpha$, $z \in \Delta$.

Отметим, что функция $K_\alpha(z) = z/(1-z)^{2-2\alpha} \in S_\alpha^*$; назовем ее функцией Кёбе порядка α .

Будем говорить, что функция $F(z)$ подчинена функции $G(z)$ в круге $|z| < R$ комплексной плоскости (пишем $F(z) < G(z)$), если $F(z)$ и $G(z)$ регулярны в круге $|z| < R$ и образ $F(\{|z| \leq r\})$ круга $|z| \leq r$ содержится в $G(\{|z| \leq r\})$ при всех r , $0 < r < R$.

В 1932 г. А. Маркс ⁽¹⁾ сделал предположение, что $f'(z) < K_0'(z)$ в Δ для всех $f \in S_0^*$. Затем Б. Пинчук ⁽²⁾ и Р. Логгин ⁽³⁾ обобщили эту гипотезу, предположив, что $f'(z) < K_\alpha'(z)$ в Δ для всех $f \in S_\alpha^*$, $\alpha \in [0, 1)$. В 1971 г. Пфальцграфф ⁽⁴⁾ доказал, что гипотеза верна для $\alpha = 1/2$. Хаммель ⁽⁵⁾ опроверг гипотезу для $\alpha = 0$.

Эта заметка в основном посвящена доказательству того, что гипотеза Маркса неверна при всех $\alpha \in [0, 1)$, кроме $\alpha = 1/2$.

Областью Маркса порядка α назовем

$$\mathcal{M}_\alpha(z_0) = \{w: w = \log f'(z_0), f \in S_\alpha^*\},$$

где под $\log f'(z_0)$ понимаем то значение, которое получим при непрерывном изменении $\log f'(tz_0)$ при изменении t от нуля до единицы, причем полагаем $\log 1 = 0$.

Отметим некоторые свойства $\mathcal{M}_\alpha(z_0)$.

1) $\mathcal{M}_\alpha(z_0) = \mathcal{M}_\alpha(|z_0|)$, так как если $f(z) \in S_\alpha^*$, то $e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) \in S_\alpha^*$, $-\pi < \theta \leq \pi$.

2) $\mathcal{M}_\alpha(r)$, $0 < r < 1$, — замкнутое, ограниченное множество.

3) Если $|z_1| < |z_0|$, то $\mathcal{M}_\alpha(|z_1|) \subset \mathcal{M}_\alpha(|z_0|)$, так как если $f(z) \in S_\alpha^*$, то $f_1(z) = t^{-1} f(tz) \in S_\alpha^*$ при $0 < t < 1$ и $f_1'(z) = f'(tz)$.

4) Множество $\mathcal{M}_\alpha(r)$ симметрично относительно вещественной оси.

Областью Кёбе порядка α назовем

$$\mathcal{K}_\alpha(r) = \{w: w = \log K_\alpha'(z), |z| \leq r\}.$$

Ветвь логарифма здесь определим, как и в определении $\mathcal{M}_\alpha(r)$.

Теорема 1. Функция $\frac{1}{4(1-\alpha)} \log K_\alpha'(z)$ — звездообразная порядка нуль для всех $\alpha \in [0, 1)$.

Обозначим $\varphi(\theta) = \log K_\alpha'(e^{i\theta}) = \log(1 + e^{i\theta}(1 - 2\alpha)) - (3 - 2\alpha) \log(1 - e^{i\theta})$. Для доказательства достаточно показать, что $\operatorname{Im} \{\varphi'(\theta)\} \leq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$; $\operatorname{Re} \{\varphi'(\theta)\} \leq 0$ при $\theta \in [0, \pi]$, $\operatorname{Re} \{\varphi'(\theta)\} \geq 0$ при $\theta \in [\pi, 2\pi]$.

Теорема 2. Пусть $0 < r < 1$ и w_0 — граничная точка $\mathcal{M}_\alpha(r)$, $\alpha \in [0, 1)$. Тогда $w_0 = \log f_0'(r)$, где

$$f_0(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta_1} z)^{2(1-\alpha)s} (1 - e^{i\theta_2} z)^{2(1-\alpha)(1-s)}} \in S_\alpha^*, \quad (1)$$

$$0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 2\pi; \quad 0 \leq s < 1.$$

Доказательство. По определению $\mathcal{M}_\alpha(r)$, существует $f_0 \in S_\alpha^*$ такая, что $w_0 = \log f_0'(r)$. Известно (см. (6)), что f_0 либо является решением экстремальной задачи $\min_{f \in S_\alpha^*} |\log f'(r) - a|$ с некоторым a , где a — внешняя точка

по отношению к $\mathcal{M}_\alpha(r)$, либо пределом таких решений. Для функций $f(z) \in S_\alpha^*$ имеет место следующее интегральное представление:

$$f(z) = z \exp \left\{ -2(1-\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \log(1 - e^{-it}z) dp(t) \right\}.$$

где $p(t)$ — неубывающая функция с полной вариацией, равной единице. Это доказывается, например, так же, как Г. М. Голузин (7) (или (8), стр. 587) получает интегральное представление для $f \in S_0^*$. Опираясь на это представление и вариационные формулы Г. М. Голузина для классов функций, представимых с помощью интегралов Стильтьеса ((8), стр. 504—507), легко получим вариационные формулы в классе S_α^* , совпадающие с вариационными формулами Г. М. Голузина в классе S_0^* ((8), стр. 508). Далее те же рассуждения, что у Г. М. Голузина ((8), стр. 515 при доказательстве теоремы 2) приводят к выводу, что $p(t)$ для $f_0(z)$ есть кусочно-постоянная функция, имеющая не более двух разрывов, т. е. $f_0(z)$ имеет вид (1).

Теорему для S_0^* фактически доказал еще Г. М. Голузин в 1952 г. (см. (7) или (8), стр. 515, теорема 2, в которой нужно положить $\Phi(w) = 1/(w-a)$, где a — внешняя для $\mathcal{M}_0(r)$ точка).

Предположим теперь что гипотеза Маркса верна для $\alpha \neq 1/2$, $\alpha \in [0, 1)$, следовательно, для всех $0 < r < 1$ образ круга $|z| \leq r$ при отображении K_α' содержит образы $|z| \leq r$ при отображении f' для всех $f \in S_\alpha^*$, но $K_\alpha \in S_\alpha^*$, значит,

$$K_\alpha'(\{|z| \leq r\}) = \bigcup_{f \in S_\alpha^*} f'(\{|z| \leq r\}). \quad (2)$$

Г. М. Голузин ((8), стр. 514), используя вариационные формулы для классов функций, представимых интегралом Стильтьеса, доказал, что функция $K_0(z)$ экстремальная в задаче нахождения $\max_{f \in S_\alpha^*} |\arg f'(z)|$ при

фиксированном $z \in \Delta$; повторяя дословно его рассуждения, можно показать, что функция $K_\alpha(z)$ экстремальная в задаче $\max_{f \in S_\alpha^*} |\arg f'(z)|$. Поэтому

равенство (1) можно записать так:

$$\mathcal{M}_\alpha(r) = \mathcal{H}_\alpha(r).$$

В этом виде гипотезу Маркса формулировал еще Робинсон (8).

Теорема 3. При $\alpha \in [0, 1)$, $\alpha \neq 1/2$, $\mathcal{M}_\alpha(r) \neq \mathcal{H}_\alpha(r)$ при r , достаточно близких к единице (гипотеза Маркса неверна для $\alpha \in [0, 1)$, $\alpha \neq 1/2$).

Следуя Хаммелю (4), рассмотрим внутреннюю нормаль к границе $\mathcal{H}_\alpha(r)$ (граница $\mathcal{H}_\alpha(r)$, $0 < r < 1$, — аналитическая кривая):

$$n_\alpha(z) = -\frac{r}{2(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial r} \log \frac{1+z(1-2\alpha)}{(1-z)^{3-2\alpha}} = -\frac{z[2+z(1-2\alpha)]}{(1-z)[1+z(1-2\alpha)]}$$

здесь $z = ze^{i\theta}$.

Введем

$$f_j(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha_j}z)^{2(1-\alpha)}} \in S_\alpha^*; \quad -\pi < \alpha_j \leq \pi; \quad j=0, 1.$$

В силу теоремы 2 естественно рассмотреть функции $f_s(z) = f_0^{1-s}(z)f_1^s(z) \in S_\alpha^*$, $0 \leq s < 1$. Рассмотрим путь $\log f_s'(r)$, $s \in [0, 1]$, в $\mathcal{M}_\alpha(r)$,

соединяющий две точки на границе $\mathcal{H}_\alpha(r)$. Если $z_0 = re^{i\alpha_0}$, $z_1 = re^{i\alpha_1}$, то

$$\begin{aligned} \log f_s'(r) = & 2s(1-\alpha) \log \left(\frac{1-z_0}{1-z_1} \right) + \log \frac{1+z_0(1-2\alpha)}{(1-z_0)^{3-2\alpha}} + \\ & + \log \left[1 + 2S(1-\alpha) \frac{z_1 - z_0}{(1-z_1)(1+z_0(1-2\alpha))} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Касательная к пути (3) в точке $s=0$ будет

$$t_\alpha(z_0, z_1) = \log \left(\frac{1-z_0}{1-z_1} \right) + \frac{z_1 - z_0}{(1-z_1)(1+z_0(1-2\alpha))}. \quad (4)$$

Положим

$$\begin{aligned} R_\alpha(z_0, z_1) &= \frac{t_\alpha(z_0, z_1)}{n_\alpha(z_0)} = \\ &= \frac{1-z_0}{z_0(2+z_0(1-2\alpha))} \left[\frac{z_0 - z_1}{1-z_1} - (1+z_0(1-2\alpha)) \log \frac{1-z_0}{1-z_1} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что в формулах (3) — (5) ветви логарифмов следует выбирать так, чтобы соответственно $\log f_s'(tr)$, $t_\alpha(tz_0, tz_1)$, $R_\alpha(tz_0, tz_1)$ были непрерывными функциями от $t \in [0, 1]$ и $\log 1 = 0$.

Знак вещественной части $\operatorname{Re}\{R_\alpha(z_0, z_1)\}$ с точностью до положительного множителя есть косинус угла между $n_\alpha(z_0)$ и $t_\alpha(z_0, z_1)$. Поэтому, если существуют такие z_0, z_1 , $|z_0| = |z_1| = r$, то $\operatorname{Re}\{R_\alpha(z_0, z_1)\} < 0$, то путь (3) в $\mathcal{M}_\alpha(r)$ лежит частично вне $\mathcal{H}_\alpha(r)$ и $\mathcal{M}_\alpha(r) \neq \mathcal{H}_\alpha(r)$, т. е. предположение Маркса неверно.

Достаточно доказать существование таких z_0, z_1 для $r=1$, тогда по непрерывности функции $R_\alpha(z_0, z_1)$ найдутся нужные z_0, z_1 и для $r < 1$, достаточно близких к единице.

Введем обозначения:

$$I = \frac{\bar{z}_0 - 1}{2 + z_0(1-2\alpha)}, \quad II = \frac{z_0 - z_1}{1 - z_1} - (1 + z_0(1-2\alpha)) \log \frac{1 - z_0}{1 - z_1}.$$

Нужно показать, что

$$\operatorname{Re}\{R_\alpha(z_0, z_1)\} = \operatorname{Re}(I) \operatorname{Re}(II) - \operatorname{Im}(I) \operatorname{Im}(II) < 0.$$

Полагая при $0 \leq \alpha < 1/2$, например, $z_0 = i$, $z_1 = e^{-i\varphi}$, где $\varphi > 0$ столь близко к 0, сколько нам понадобится, легко найдем, что

$$\operatorname{Re}(I) = \frac{1}{|b|^2}(2\alpha - 3), \quad \operatorname{Im}(I) = -\frac{1}{|b|^2}(2\alpha + 1), \quad b = 2 + z_0(1-2\alpha);$$

$$\operatorname{Re}(II) = \frac{1}{|1 - z_1|}(1 + O(\varphi)), \quad \operatorname{Im}(II) = \frac{1}{|1 - z_1|}(1 + O(\varphi)).$$

$$\operatorname{Re}\{R_\alpha(z_0, z_1)\} = \frac{1}{|b|^2|1 - z_1|}[2(2\alpha - 1) + O(\varphi)].$$

Правая часть при достаточно малых $\varphi > 0$ отрицательна. Это опровергает гипотезу Маркса для $\alpha \in [0, 1/2)$.

Для опровержения гипотезы Маркса при $1/2 < \alpha < 1$ полагаем $z_0 = -i$, а на z_1 налагаем прежние условия. Вычисления показывают, что $\operatorname{Re}\{R_\alpha(z_0, z_1)\} = \frac{1}{|b|^2|1-z_1|} [2(1-2\alpha) + O(\varphi)]$. Правая часть при $\varphi > 0$ достаточно малых отрицательна.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
8 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Marx, Math. Ann., **107**, 40 (1932). ² B. Pinchuk, Duke Math. J., **35**, 721 (1968). ³ R. McLanghlin, Trans. Am. Math. Soc., **142**, 249 (1969). ⁴ J. A. Pfaltzgraff, Michigan Math. J., **18**, № 3, 275 (1971). ⁵ J. A. Hummel, Michigan Math. J., **19**, № 3, 257 (1972). ⁶ Н. А. Лебедев, Вестн. ленингр. ун-ва, № 8, 29 (1955). ⁷ Г. М. Голузин, Уч. Зап. Ленингр. ун-ва, **144**, 85 (1952). ⁸ Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», 1966. ⁹ R. M. Robinson, Trans. Am. Math. Soc., **61**, 1 (1947).