Доклады Академии наук СССР
1974. Том. 214, № 1

УДК 517.9 МАТЕМАТИКА

М. Н. ФЕЛЛЕР

О РАЗРЕШИМОСТИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 4 IV 1973)

Бесконечномерный линейный «эллиптический» оператор второго порядка — «эллиптический» оператор для функций на абстрактном гильбертовом пространстве — определен нами в ([1]). Частным случаем этого оператора является оператор Лапласа, введенный П. Леви ([2]).

В этой работе рассматриваются вопросы однозначной разрешимости краевой задачи для «эллиптических уравнений» с таким оператором в случае, соответствующем уравнениям с постоянными коэффициентами (и значит, в частности, и уравнениям с лапласианом Леви, но заметим, что при этом нам не требуются ограничения на области типа условий, приведенных в ([3–5])).

При переходе к бесконечномерному случаю возникает ряд новых явлений. Так, класс областей, для которых бесконечномерный эллиптический оператор допускает коэрцитивные оценки, оказывается лежащим, например, в эллипсоиде, у которого ряд из длин главных полуосей сходится с некоторой степенью, впрочем такой, что этот эллипсоид имеет ненулевую меру, а не в сфере, как можно было ожидать по аналогии с конечномерным случаем. Решение оказывается принадлежащим классу функций с нормой, которая существенно бесконечномерна и т. д.

1. Рассмотрим скалярные функции (нелинейные функционалы) $U(x)$ на сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве H, $x\in H$.

Пусть $H_{+1}\subset H_{\beta'}\subset H_0\subset H_{-1}$ ($H_0=H$, $\beta'\in(0,1)$) — цепочка пространств из гильбертовой шкалы пространств $\{H_\beta\}$, $-\infty<\beta<\infty$, с порождающим оператором T таким, что $T^{-\beta'}$ и $T^{-1+\beta'}$ — операторы Гильберта — Шмидта.

Введем в рассмотрение пространство $\Upsilon\subset H_{-1}$, $\Upsilon=\{y\in H_{-1}$: $\mathfrak{M}(y,h)_H{}^2=$ $=\nu^2$ $\forall E$ в H и $\forall\nu<\infty\}$, где $\mathfrak{M}(\Phi)$ — среднее значение функции $\Phi(h)$ по сфере $\|h\|_H{}^2=1$ (см. ([2]), стр. 247), E — базис в H, $h\in H_{+2-\beta'}$, и рассмотрим фактор-пространство $\bar\Upsilon=\Upsilon/\Upsilon_0$,

$$\Upsilon_0=\{y\in\Upsilon:\ \mathfrak{M}(y,h)_H{}^2=0\},\qquad (\bar y,\bar z)_{\bar\Upsilon}=\langle y,z\rangle_\Upsilon=\mathfrak{M}(y,h)_H(z,h)_H,$$
$$\bar y,\bar z\in\bar\Upsilon,\ y\in\bar y,\ z\in\bar z.$$

Пусть $U(x)\in C^2(\mathfrak{G})$, $\mathscr{L}U(x)$ — «эллиптический» оператор ([1]),

$$\mathscr{L}U(x)=\mathfrak{M}(AK_{U''}(x),h\otimes h)_{H\otimes H}+(a,U'(x))_H+\alpha U(x),\tag{1}$$

$$\Delta<\mathscr{L}<\Delta,\tag{2}$$

где Δ — лапласиан Леви, $K_{U''}\in H_{-1}\otimes H_{-1}$, $K_{U''}$ — обобщенное ядро второй вариации функции U, $U''(x)$ — гессиан, а $U'(x)$ — градиент функции $U(x)$ в точке x, A — линейный оператор в $H_{-1}\otimes H_{-1}$, $a\in H_{+2-\beta'}$.

Оператор $\mathscr{L}$ рассмотрим в случае, когда A — постоянный оператор, a — постоянный элемент, α — постоянная.

Обозначим через $C^l(\mathfrak{G})$ класс функций $U(x)$, l раз непрерывно дифференцируемых по Фреше в $\mathfrak{G}\subset H$, $\mathfrak{G}$ — ограниченная область с границей Γ, $C_0{}^l(\mathfrak{G})$ — подкласс, состоящий из финитных функций, $C'(\mathfrak{G})$ — класс функций таких, что $U'(x)\in\overline{\Upsilon}$, $C'(\mathfrak{G})\subset C^1(\mathfrak{G})$, $C''(\mathfrak{G})$ таких, что оператор $\mathscr{L}U$ существует и не зависит от выбора базиса (см. ([1])), $C''(\mathfrak{G})\subset C^2(\mathfrak{G})$.

Пусть $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$ — гильбертово пространство функций на $\mathfrak{G}\subset H$, интегрируемых с квадратом по гауссовой мере μ с корреляционной формой $(\overline{T}^{-1}x, \overline{T}^{-1}y)_H=(x, y)_{H_{-1}}$ и нулевым средним, $\|U\|^2_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})}=\int\limits_{\mathfrak{G}} U^2(x)\mu(dx)$. Пополнение $C'(\mathfrak{G})$ по норме $\|U\|^2_{\mathfrak{W}'_2(\mathfrak{G})}=\int\limits_{\mathfrak{G}}[U^2(x)+\|U'(x)\|^2_{\Upsilon}]\mu(dx)$ обозначим через $\mathfrak{W}_2'(\mathfrak{G})$, а пополнение $C_0^1(\mathfrak{G})\cap C'(\mathfrak{G})$ по этой норме — через $\mathring{\mathfrak{W}}_2'(\mathfrak{G})$, $\mathring{\mathfrak{W}}_2'(\mathfrak{G})\subset\mathfrak{W}_2'(\mathfrak{G})$.

Теорема 1. *Для оператора $\mathscr{L}$ выполняется оценка снизу квадратичной формы*

$$(\mathscr{L}U, U)_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})}\geqslant K_1\|U\|^2_{\mathfrak{W}_2'(\mathfrak{G})}-K_2\|U\|^2_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})}\qquad \forall U\in\mathring{\mathfrak{W}}_2'(\mathfrak{G}), \tag{3}$$

K_1, K_2 — константы, $K_1>0$ (K_1, K_2 не зависят от U, а только от $\mathscr{L}$ и $\mathfrak{G}$), если $\mathfrak{G}$ — ограниченная область пространства $H_{\beta'}$.

Схема доказательства. Установим формулу интегрирования по частям. Благодаря финитности и используя преобразование сдвига, получим, что $V_1\in C_0^1(\mathfrak{G})\cap C'(\mathfrak{G})$, $V_2\in C'(\mathfrak{G})$

$$\int\limits_{\mathfrak{G}} V_1(x)(V_2'(x), h)_H\mu(dx)=\int\limits_{\mathfrak{G}} V_2(x)[V_1(x)(x,h)_{H_{+1}}-(V_1'(x),h)_H]\mu(dx). \tag{4}$$

Достаточно доказать (3) для $U\in C_0^\infty(\mathfrak{G})\cap C''(\mathfrak{G})\cap C'(\mathfrak{G})$.

Пусть вначале $A=-E$ (E — единичный оператор) $a=0$, $\alpha=0$. Тогда $\mathscr{L}=-\Delta$.

Интегрируя по частям, согласно (4), имеем

$$(-\Delta U, U)_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})}=\int\limits_{\mathfrak{G}}\mathfrak{M}(U'(x),h)^2_H\mu(dx)-\int\limits_{\mathfrak{G}} U(x)\mathfrak{M}[(x,h)_{H_{+1}}(U'(x),h)_H]\mu(dx). \tag{5}$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|\leqslant\|x\|_{H_{\beta'}}$ $\operatorname{Sp} T^{-2\beta'}<\infty$ по условию, $x_k=(x, e_k)_H$, $\{e_k\}_1^\infty$ — ортонормированный базис в H из собственных векторов оператора T, $Te_k=\lambda_k e_k$, $k=1,2,\ldots$, то $(|x_1|^{1/2},\ldots,|x_k|^{1/2},\ldots)\in H$. Кроме того $H_{\beta'}$ имеет полную меру в H

$$\mu(H_{\beta'})=\int\limits_H\lim_{\nu\to 0}\exp(-{}^1/_2\nu\|x\|^2_{H_{\beta'}})\mu(dx)=\lim_{\nu\to 0}\left[\prod_{k=1}^{\infty}(1-\nu\lambda_k^{-2+2\beta'})\right]^{-1}=1,\qquad \nu>0,$$

поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2+2\beta'}=\operatorname{Sp} T^{-2+2\beta'}<\infty$$

по условию. Как следует из ([6]) почти для всех таких элементов из H, а значит, и почти для всех $x\in\mathfrak{G}$, так как $H_{\beta'}$ имеет полную меру в H, имеем

$$|\mathfrak{M}[(x,h)_{H_{+1}}(U'(x),h)_H]|\leqslant\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k|x_k|^{1/2})^4\right]^{1/2}[\mathfrak{M}(U'(x),h)^2_H]^{1/2}=$$

$$=3^{1/2}[\mathfrak{M}(U'(x),h)^2_H]^{1/2}. \tag{6}$$

Отсюда и из элементарного неравенства $ab \leqslant \delta a^2 + b^2/(4\delta)$, $\delta > 0$, следует

$$\left| \int_{\mathfrak{G}} U(x)\,\mathfrak{M}\,[(x,h)_{H_{+1}}(U'(x),h)_H\,\mu(dx) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 3^{1/2}\delta \int_{\mathfrak{G}} \mathfrak{M}\,(U'(x),h)^2_H\,\mu(dx) + \frac{3^{1/2}}{4\delta}\,\|U\|^2_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})}. \tag{7}$$

Из (5) и (7) имеем

$$(-\Delta U, U)_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})} \geqslant (1 - 3^{1/2}\delta) \int_{\mathfrak{G}} \mathfrak{M}\,(U'(x),h)^2_H\,\mu(dx) - \frac{3^{1/2}}{4\delta}\,\|U\|^2_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})}.$$

Выбирая $\delta < 3^{-1/2}$, получим (3).

Пусть теперь $A \neq -E$, $a \neq 0$, $\alpha \neq 0$. Согласно (1), (2)

$$C \int_{\mathfrak{G}} [\Delta U(x)]^2 \mu(dx) \geqslant \int_{\mathfrak{G}} [\mathscr{L} U(x)]^2 \mu(dx) \geqslant c \int_{\mathfrak{G}} [\Delta U(x)]^2 \mu(dx).$$

Отсюда, если P — ортопроектор $Px = \sum_{k=1}^{N} x_k e_k$ на N-мерное пространство R_N, то

$$C_N \int_{\mathfrak{G} \cap R_N} [\Delta_N U_P(x)]^2 \mu_P(dx) \geqslant \int_{\mathfrak{G} \cap R_N} [\mathscr{L}_N U_P(x)]^2 \mu_P(dx) \geqslant$$

$$\geqslant c_N \int_{\mathfrak{G} \cap R_N} [\Delta_N U_P(x)]^2 \mu_P(dx),$$

где $U_P(x) = U(Px)$,

$$\mu_P(dx) = (2\pi)^{-N/2} \prod_{k=1}^{N} \lambda_k \exp\left(-{}^1/_2 \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2 x_k^2\right) dx_1 \ldots dx_N,$$

$$\mathscr{L}_N = -\frac{1}{N} \sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha, \quad a_{jk}^N = \sum_{i=1}^{N} (-Ae_j \otimes e_k, e_i \otimes e_i)_{H \otimes H}$$

(будем предполагать, что $a_{jk}^N = a_{kj}^N$), $a_j = (a, e_j)_H$. Продолжая $U_P(x)$ нулем вне $\mathfrak{G} \cap R_N$ и воспользовавшись ее преобразованием Фурье $\tilde{U}_P(\xi)$, получим

$$\frac{C_N}{2N} \sum_{j=1}^{N} \xi_j^2 \geqslant \frac{1}{N} \sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}^N \xi_j \xi_k \geqslant \frac{c_N}{2N} \sum_{j=1}^{N} \xi_j^2.$$

По этому неравенству, обобщенному неравенству Коши — Буняковского и используя оценку типа (6), получим, что

$$(\mathscr{L}_0 U, U)_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})} \equiv (\mathfrak{M}\,(AK_{U''}, h \otimes h)_{H \otimes H}, U)_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})} \geqslant K_1 \|U\|^2_{\mathring{\mathfrak{W}}_2'(\mathfrak{G})} - K_3 \|U\|^2_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})}. \tag{8}$$

Согласно (4) имеем

$$|((a, U')_H + \alpha U, U)_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})}| \leqslant K_4 \|U\|^2_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем требуемую оценку (3).

Заметим, что в конечномерном случае неравенство типа (3) есть неравенство Гординга (7).

Не труднее оценить форму $(\mathscr{L} U, V)_{\mathfrak{F}_2(\mathfrak{G})}$ и сверху:

$$|(\mathscr{L} U, V)_{\mathfrak{F}_2(\mathfrak{G})}| \leqslant K \|U\|_{\mathfrak{W}_2'(\mathfrak{G})} \|V\|_{\mathfrak{W}_2'(\mathfrak{G})} \quad \forall U \in \mathfrak{W}_2'(\mathfrak{G}),\ V \in \mathring{\mathfrak{W}}_2'(\mathfrak{G}). \tag{10}$$

2. Функция $U \in \mathfrak{W}_2'(\mathfrak{G})$ называется обобщенным решением задачи Дирихле

$$\mathscr{L} U(x) = F(x) \text{ в } \mathfrak{G}, \quad U|_\Gamma = G(x), \tag{11}$$

если при заданных $F \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$, $G \in \mathfrak{W}_2'(\mathfrak{G})$ справедливо

$$\mathscr{L}(U, V) \equiv \int_{\mathfrak{G}} \{\mathfrak{M}[-(AU'(x) \otimes V'(x), h \otimes h)_{H \otimes H} +$$

$$+ U(x)(AV'(x) \otimes \overline{T}^2 x, h \otimes h)_{H \otimes H}] + (a, U'(x))_H V(x) + \alpha U(x) V(x)\} \mu(dx) =$$

$$= (F, V)_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})} \quad \forall V \in \mathring{C}_0^\infty(\mathfrak{G}) \cap C''(\mathfrak{G}) \cap C'(\mathfrak{G}) \quad \text{и } U - G \in \mathring{\mathfrak{W}}_2'(\mathfrak{G}).$$

Теорема 2. *Существует единственное обобщенное решение краевой задачи для уравнения* $\mathscr{L}_{K_0} U(x) \equiv \mathscr{L} U(x) + K_0 U(x) = F(x)$ *при* $K_0 > K_2$ (K_2 — *постоянная, входящая в формулировку теоремы* 1).

Действительно, функционал $\Phi(V) = (F, V)_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})} - \mathscr{L}_{K_0}(G, V)$ ограничен и линеен в $\mathring{\mathfrak{W}}_2'(\mathfrak{G})$. Благодаря оценки выражения $\mathscr{L}_{K_0}(U, V)$, получаемым согласно теореме 1 и из (10), по теореме П. Лакса и А. Мильграма [8] существует единственный элемент $Z \in \mathring{\mathfrak{W}}_2'(\mathfrak{G})$ такой, что $\Phi(V) = \mathscr{L}_{K_0}(Z, V)$. Отсюда $\mathscr{L}_{K_0}(Z+G, V) = (F, V)_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})}$, $U = Z + G$ — искомое решение.

Теорема 3. *Для задачи* (11) *с* $G = 0$ *либо существует единственное обобщенное решение для любой функции* $F \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$, *либо существует конечное число линейно независимых решений* U_k, $k = 1, \ldots, p$, *при этом решение* (*не единственное*) *существует тогда и только тогда, когда* $(F, U_k)_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})} = 0$.

Действительно, рассмотрим в $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$ оператор, задаваемый теоремой 2, $Z = K_0^{-1} SF$, $F \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$, $Z \in \mathring{\mathfrak{W}}_2'(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$. Запишем уравнение $\mathscr{L}(U, V) = (F, V)_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})}$ в виде $\mathscr{L}_{K_0}(U, V) = (K_0 U + F, V)_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})}$. U будет удовлетворять этому уравнению тогда и только тогда, когда $U - SU = F_1$, где $F_1 = K_0^{-1} SF$. Покажем, что S вполне непрерывен. Если $\|F\|_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})} \leqslant C$, $F \in \mathrm{M}$, то $\|SF\|_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})} \leqslant K_0 K_1^{-1} C$. Разложим $Z \in S\mathrm{M}$ в ряд по функционалам Фурье — Эрмита

$$\Psi_{m_1 \ldots m_N}(x) = \prod_{i=1}^{N} H_{m_i}(2^{-1/2}(x, h_i)_{H_{+1}}), \quad N = 1, 2, \ldots; \quad m_i = 0, 1, 2, \ldots$$

(см. [9]), $H_m(u)$ — частично нормированные полиномы Эрмита, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $h_i = T^{-1} e_i$, $i = 1, 2, \ldots$ При помощи (4) и свойств полиномов Эрмита нетрудно получить, что

$$\left| \sum_{m_1, \ldots, m_N = 0}^{N} Z^2_{m_1, \ldots, m_N} - \sum_{m_1, \ldots, m_n = 0}^{n} Z^2_{m_1, \ldots, m_n} \right| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2} \|(Z', e_i)_H\|^2_{\mathfrak{L}_2(H)} +$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{N} \frac{1}{\lambda_i^2} \|(Z', e_i)_H\|^2_{\mathfrak{L}_2(H)} < \varepsilon \quad \forall Z \in S\mathrm{M},$$

где $Z_{m_1, \ldots, m_N} = (Z \Psi_{m_1, \ldots, m_N})_{\mathfrak{L}_2(H)}$, и из признака компактности в сепарабельном гильбертовом пространстве следует, что $S\mathrm{M}$ компактно в $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$. То же справедливо и для сопряженного оператора. Воспользовавшись теперь теорией Фредгольма — Рисса — Шаудера, получим утверждение теоремы.

Институт прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
25 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, М., 1961. [2] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1, М., 1965. [3] N. Wiener, Massach, J. Math., 3, 72 (1924). [4] L. Young, Acta Math., 67 (1936). [5] L. Young, Math. Ann., 155, 4 (1938). [6] R. Salem, Actual Sci. Industr., 862, 46 (1940). [7] К. И. Осколков, Матем. заметки, 12, 3 (1972). [8] A. Baernstein, II, Studia Math., 42, 3 (1972). [9] Б. И. Голубов, Матем. сборн., 89, 4 (1972).